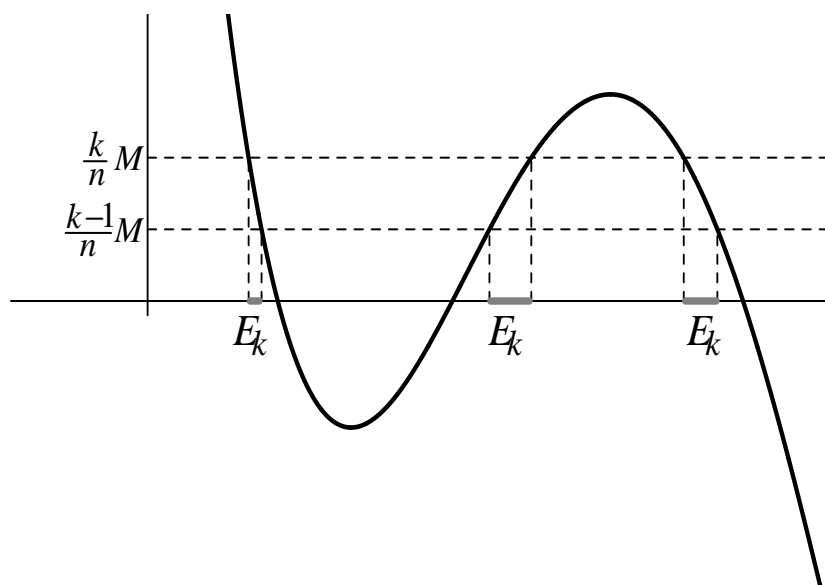


# Apuntes de la Teoría de la Medida



**Herbert A. Medina**

Profesor de Matemáticas

Loyola Marymount University

Los Angeles, California, EEUU

Herbert A. Medina  
Profesor de Matemáticas  
Loyola Marymount University  
Los Angeles, California, EEUU

*Apuntes de la  
Teoría de la Medida*

San Salvador, El Salvador

## Prefacio

Un carpintero sin sierra eléctrica puede trabajar, pero con muchas dificultades. Habrán muchos trabajos que no podrá aceptar porque carece de equipo adecuado. Un matemático sin el conocimiento de los elementos fundamentales de la teoría de la medida puede trabajar, pero con muchas dificultades. Habrán muchos problemas en los cuales no podrá trabajar porque carece de técnicas y teoremas adecuados. La teoría de la medida es la “sierra eléctrica” del análisis moderno.

Apuntes de la Teoría de la Medida es el resultado de un cursillo que se realizó en la Escuela de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Universidad de El Salvador (UES) en julio de 1995. Ese curso y estos apuntes fueron diseñados para estudiantes y profesores de matemáticas quienes tienen un buen conocimiento de los conceptos y técnicas fundamentales del análisis clásico. El lector ideal es el estudiante de matemáticas de último año de licenciatura o de primer año de maestría. Estos Apuntes están escritos con más detalles de lo que se acostumbra en textos de matemáticas. Esto se hizo para que el lector que estudia teoría de la medida sin la ayuda de un profesor lo pueda hacer sin mucha referencia a otros textos. Los Apuntes han prestado mucho de los libros de Royden [R] y Folland [F], los textos que utilicé cuando aprendí el tópico.

Los Apuntes no se hubieran escrito sin la ayuda y apoyo de varias personas. Los profesores Martín Enrique Guerra Cáceres, José Nerys Funes y F. Javier Martín Ortiz leyeron borradores e hicieron muchos comentarios que mejoraron el producto final. Aracelia Fernández, mi estudiante y asistente en Loyola Marymount University, hizo cambios al expediente de que contiene el documento.

Deseo disculparme por todos los errores gramáticos, ortográficos y estilísticos que existen en este documento. Casi toda mi educación formal ha sido en inglés, y éste es el primer documento de matemáticas que he escrito en español. También me disculpo por cualquier error matemático que exista en estos Apuntes. Ellos son completamente mi responsabilidad. Le pido al lector que encuentre errores que por favor me los comunique por correo electrónico a la dirección [hmedina@lmu.edu](mailto:hmedina@lmu.edu) o correo convencional a la dirección Mathematics Department, Loyola Marymount University, 1 LMU Drive, Los Angeles, CA 90045-2659, USA.

*Herbert A. Medina*  
*Loyola Marymount University, Los Angeles*

## Indice

Capítulo 1. La Medida de Lebesgue en la Recta Real	1
1.1. Introducción	1
1.2. Medida Exterior	2
1.3. Conjuntos Medibles y la Medida de Lebesgue	5
1.4. Dos Ejemplos	12
1.5. Funciones Medibles	13
Capítulo 2. La Integral de Lebesgue	19
2.1. Repaso de la Integral de Riemann	19
2.2. La Integral Sobre un Conjunto de Medida Finita	20
2.3. La Integral de una Función No Negativa	26
2.4. La Integral General de Lebesgue	30
Capítulo 3. Medidas Generales	35
3.1. Medidas y Funciones Medibles	35
3.2. Construcción de Medidas	39
3.3. Integración	43
3.4. Medidas con Signo	48
3.5. El Teorema Radon-Nikodym	52
3.6. Medidas Producto	56
Capítulo 4. Los Espacios $L^p$	64
4.1. Definiciones y Propiedades Básicas	64
4.2. Estructuras Básicas del Análisis Funcional	71
4.3. Los Espacios $L^p$ son Espacios de Banach	78
Bibliografía	83

# Capítulo 1

## La Medida de Lebesgue en la Recta Real

### 1.1. Introducción

El concepto de medida es una extensión del concepto de longitud. En el estudio de análisis real se hace necesario poder definir la “longitud” de conjuntos de números reales complicados. Por ejemplo, la longitud del intervalo  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] = \frac{1}{4}$ , pero ¿cuál es la “longitud” del conjunto de números irracionales?

Lo que deseamos hacer es definir una función  $m$  que asigne a cada subconjunto de números reales un número real no negativo (posiblemente  $\infty$ ), y que esta función generalice y se comporte como una función que mide longitud. Estas son las propiedades que deseamos que satisfaga  $m$ :

- (1) Para cada intervalo  $I$ ,  $m(I) = \text{longitud de } I (= l(I).$ )
- (2) Para un conjunto  $E \subset \mathbb{R}$  y  $\forall x \in \mathbb{R}, m(E) = m(x + E)$   
( $= m\{x + e : e \in E\}$ ).
- (3) Si  $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$  es una colección numerable de conjuntos disjuntos ( $E_i \cap E_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ ), se tiene que  $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$ .

Si una función  $m$  satisface la propiedad 2 se dice que  $m$  es *invariante por translación* y si satisface la propiedad 3 que  $m$  tiene la propiedad de *aditividad sobre conjuntos disjuntos*.

Obviamente, queremos que esta función  $m$  le dé una “longitud” a los conjuntos que se puedan construir “naturalmente” mediante intervalos. Incluso será ideal que esta función de “longitud” a todo subconjunto de números reales. En la última sección de este capítulo veremos que esto no es posible.

## 1.2. Medida Exterior

Una forma de introducir la medida de Lebesgue es mediante el concepto de medida exterior.

DEFINICIÓN 1.1. Para un conjunto  $A \subset \mathbb{R}$ , sea cualquier colección numerable  $\{I_i\}$  de intervalos abiertos que cubra  $A$ . Se define la *medida exterior* de  $A$ ,  $m^*(A)$ , por

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum l(I_i) : A \subset \bigcup I_i \right\}$$

donde  $l(I_i)$  = longitud de  $I_i$ , y el ínfimo se toma entre todos los recubrimientos del conjunto  $A$  formados por colecciones numerables de intervalos abiertos.

Observemos que la medida exterior está bien definida y es no negativa para todo subconjunto de números reales<sup>1</sup>  $A$  porque siempre existe (por lo menos) un recubrimiento de cada conjunto formado por una colección numerable de intervalos abiertos, la suma está bien definida porque sólo tiene números positivos, y el ínfimo de un conjunto de números no negativos es no negativo. Obviamente, hay conjuntos  $A$  tal que  $m^*(A) = \infty$ .

OBSERVACIONES. Esta definición da inmediatamente que

- (1)  $m^*(\emptyset) = 0$ . (Como  $I_n = (0, \frac{1}{n})$  para  $n \geq 1$  se tiene que  $\emptyset \subset I_n$ ; por lo tanto,  $m^*(\emptyset) \leq \frac{1}{n} \forall n \geq 1$ .)
- (2) *La medida de un conjunto que contiene un número real es cero.* (Si  $A = \{a\}$  se considera  $I_n = (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$  para  $n \geq 1$ , y se tiene que  $A \subset I_n$  y por lo tanto  $m^*(A) \leq \frac{2}{n} \forall n \geq 1$ .)
- (3)  $A \subset B \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$  porque si  $A \subset \cup I_i$  tenemos  $B \subset \cup I_i$  entonces el ínfimo para computar  $m^*(A)$  se calcula considerando más colecciones de intervalos abiertos y, por lo tanto, debe ser menor o igual que  $m^*(B)$ .

Es evidente que  $m^*$  es invariante por translación (porque la translación de un intervalo es un intervalo), pero no está claro si la medida exterior satisface las otras dos condiciones de la sección previa. La primera tarea será demostrar que  $m^*$  satisface la propiedad 1.

---

<sup>1</sup>Para el resto de éste y el siguiente capítulo, la palabra “conjunto” se utilizará como sinónimo de “subconjunto de números reales.”

PROPOSICIÓN 1.1. *La medida exterior de un intervalo es su longitud.*

DEMOSTRACIÓN. Primero consideramos el caso en que el intervalo es cerrado y finito:  $I = [a, b]$ . Como el intervalo abierto  $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$  contiene a  $[a, b]$  para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $m^*([a, b]) \leq b - a + 2\varepsilon$ . Esto implica que  $m^*[a, b] \leq b - a$ . Para demostrar la otra desigualdad es suficiente demostrar que, si  $\{I_n\}$  es una colección numerable de intervalos abiertos tal que  $[a, b] \subset \bigcup I_n$ , entonces  $\sum l(I_n) \geq b - a$ . Por el teorema Heine-Borel, para cada colección de abiertos que recubre  $[a, b]$  existe una subcolección finita que también cubre a  $[a, b]$ . Como todas las cantidades en la suma son positivas, es suficiente demostrar la declaración en el caso en que la colección de intervalos abiertos es finita. Como  $a \in \bigcup_{n=1}^N I_n$ , se tiene que  $a$  está contenido en uno de los intervalos. Reordenamos los intervalos para que  $a \in I_1 = (a_1, b_1)$ . Se tiene que  $a_1 < a < b_1$ . Si  $b_1 > b$  el argumento está completo, si este no es el caso,  $b_1 \in [a, b]$  y como  $b_1 \notin (a_1, b_1)$ , existe otro intervalo  $I_2 = (a_2, b_2)$  tal que  $b_1 \in (a_2, b_2)$ , y  $a_2 < b_1 < b_2$ . Continuando en esta manera, se obtiene una sucesión  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k)$  que es parte de la colección  $\bigcup_{n=1}^N I_n$  tal que  $a_i < b_{i-1} < b_i$ . Como la colección es finita, el proceso terminará, y se tendrá  $b \in (a_k, b_k)$ . Es decir  $a_k < b < b_k$ .

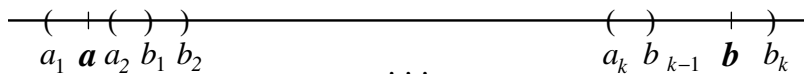


FIGURA 1. Cubrimiento de intervalo  $(a, b)$  por subcolección finita.

Se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N l(I_n) &\geq \sum_{n=1}^k l(a_n, b_n) = (b_k - a_k) + (b_{k-1} - a_{k-1}) + \cdots + (b_1 - a_1) \\ &= b_k + (b_{k-1} - a_k) + (b_{k-2} - a_{k-1}) + \cdots \\ &\quad + (b_1 - a_2) - a_1, \\ &> b_k - a_1, \end{aligned}$$

y la última cantidad es  $> b - a$  porque  $b_k > b$  y  $a_1 < a$ . Esto demuestra que  $m^*[a, b] \geq b - a$ .

Si  $I$  es cualquier intervalo finito y  $\varepsilon > 0$ , hay un intervalo cerrado  $J \subset I$  tal que  $l(I) - \varepsilon < l(J) = m^*(J) \leq m^*(I) \leq m^*\bar{I} = l(\bar{I}) = l(I)$ . Esto da  $l(I) = m^*I$ .

Si  $I$  es un intervalo infinito, para cada entero positivo  $n$ , existe un intervalo cerrado finito  $I_n$  tal que  $m^*(I_n) = n$  y  $I_n \subset I$ . Se tiene que  $m^*I \geq m^*I_n = n$ , de lo cual se deduce que  $m^*(I) = \infty$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 1.2. Si  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una colección numerable de conjuntos entonces  $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*A_n$ .<sup>2</sup>

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que todos los conjuntos tienen medida exterior finita. (Si uno de ellos tiene medida exterior infinita, el resultado es trivial) y fijemos  $\varepsilon > 0$ . Para cada  $n$  existe una colección numerable  $\{I_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$  tal que  $A_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{n,m}$  y  $\sum_{m=1}^{\infty} l(I_{n,m}) < m^*A_n + \frac{\varepsilon}{2^n}$ . La colección  $\{I_{n,m}\}_{n,m=1}^{\infty}$  es numerable y recubre a  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Se tiene que  $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n,m} l(I_{n,m}) = \sum_n \sum_m l(I_{n,m}) \leq \sum_n m^*A_n + \frac{\varepsilon}{2^n} = \sum_n m^*A_n + \varepsilon$ . Como la desigualdad es cierta para todo  $\varepsilon > 0$ , la demostración está completa.  $\square$

COROLARIO 1.3. Si  $A$  es un conjunto numerable,  $m^*(A) = 0$ .

Se deduce inmediatamente que cualquier intervalo no es numerable y que la medida exterior del conjunto de números racionales es cero.

Una de las técnicas importantes en la teoría de la medida es la de aproximar un conjunto cualquiera por una unión de conjuntos abiertos o cerrados que “mide” casi lo mismo que el conjunto original.

PROPOSICIÓN 1.4. Si  $A$  es un conjunto y  $\varepsilon > 0$ , existe un abierto  $U$  tal que  $A \subset U$  y  $m^*(U) \leq m^*(A) + \varepsilon$ . También existe una colección numerable de abiertos  $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$  y  $m^*(A) = m^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right)$ .

DEMOSTRACIÓN. Si  $m^*(A) = \infty$ , no hay nada que demostrar. Si  $m^*(A) < \infty$ , la primera declaración se deduce inmediatamente de la definición de medida exterior, de la subaditividad y del hecho que la unión numerable de abiertos es un abierto. Para demostrar la segunda afirmación, observemos que para cada entero positivo  $n$  existe un abierto  $U_n$  tal que

<sup>2</sup>Esta propiedad se llama *sub aditividad*.

$A \subset U_n$  y  $m^*U_n \leq m^*A + \frac{1}{n}$ . Como  $A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ ,  $m^*A \leq m^*(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n)$ . También  $m^*(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n) \leq m^*U_n \leq m^*A + \frac{1}{n}$ ,  $\forall n \geq 1$  y por lo tanto,  $m^*(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n) \leq m^*A$ .  $\square$

La función  $m^*$  está definida para, (es decir, “mide”), todo subconjunto de números reales; pero, como comentamos antes, no satisface la propiedad de aditividad sobre conjuntos disjuntos. Lo que haremos será restringir la colección de conjuntos, y  $m^*$  restringida a estos conjuntos será la medida de Lebesgue y cumplirá la propiedad de aditividad sobre conjuntos disjuntos.

### Ejercicios

1. Demuestre que, si  $A$  es un conjunto tal que  $m^*A = 0$ , para todo conjunto  $B$  se verifica que  $m^*(A \cup B) = m^*B$ .

2. Demuestre directamente (sin utilizar la Proposición 1.2) que un conjunto numerable tiene medida exterior cero.

### 1.3. Conjuntos Medibles y la Medida de Lebesgue

La siguiente definición la formuló originalmente Carathéodory.

DEFINICIÓN 1.2. Un conjunto  $E$  se llama *medible* si para cada conjunto  $A$  se tiene  $m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$ .

Para justificar esta definición, por lo menos debemos comprobar primero que la colección de conjuntos medibles tiene algún tipo de estructura; y después, que los conjuntos fundamentales son medibles. Estas son las tareas principales de esta sección.

OBSERVACIONES. (1) Como  $A \subset (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$ , se tiene que  $m^*A \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$ . Entonces, para demostrar que un conjunto es medible, sólo hay que demostrar la otra desigualdad.

(2) La definición es simétrica y por lo tanto  $E$  es medible  $\Leftrightarrow E^c$  es medible.

(3) Obviamente  $\emptyset$  y  $\mathbb{R}$  son medibles.

LEMA 1.5. Si  $m^*(E) = 0$ ,  $E$  es medible.

DEMOSTRACIÓN. Si  $A$  es un conjunto,  $A \cap E \subset E$  y  $m^*(A \cap E) \leq m^*(E)$ ; o sea  $m^*(A \cap E) = 0$ . También se tiene que  $(A \cap E^c) \subset A$  y, por lo tanto,  $m^*A \geq m^*(A \cap E^c) + m^*(A \cap E)$ .  $\square$

LEMA 1.6. Si  $E_1, E_2, \dots, E_n$  son medibles,  $\bigcup_{j=1}^n E_j$  es medible.

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente demostrarlo en el caso  $n = 2$ , porque el resultado general se deduce por inducción. Sea  $A$  un conjunto. Como  $E_1$  es medible tenemos que  $m^*(A \cap E_2^c) = m^*(A \cap E_2^c \cap E_1) + m^*(A \cap E_2^c \cap E_1^c)$ , y como  $A \cap (E_1 \cup E_2) = (A \cap E_2) \cup (A \cap E_1 \cap E_2^c)$  se tiene  $m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) \leq m^*(A \cap E_2) + m^*(A \cap E_1 \cap E_2^c)$ . Por lo tanto, se tiene que  $m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \cap E_2^c \cap E_1^c) \leq m^*(A \cap E_2) + m^*(A \cap E_1 \cap E_2^c) + m^*(A \cap E_2^c \cap E_1^c) = m^*(A \cap E_2) + m^*(A \cap E_2^c) = m^*A$ , porque  $E_2$  es medible. Las leyes de DeMorgan dan

$$m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \leq m^*A.$$

$\square$

Una colección no vacía de conjuntos que es cerrada por complementos y uniones finitas se llama *álgebra de conjuntos* o simplemente un *álgebra*. Se tiene que la colección de conjuntos medibles  $\mathfrak{M}$  es un álgebra. Una colección no vacía de conjuntos que es cerrada por complementos y uniones numerables se llama una  *$\sigma$ -álgebra*. Está claro que de las leyes de DeMorgan se deduce que una álgebra [ $\sigma$ -álgebra] también es cerrada por intersecciones finitas [numerables]. También está claro que cualquier álgebra o  $\sigma$ -álgebra contiene a  $\emptyset$  y  $\mathbb{R}$ .

LEMA 1.7. Sea  $A$  un conjunto y  $E_1, E_2, \dots, E_n$  una colección de conjuntos medibles disjuntos. Se tiene que

$$m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^n m^*(A \cap E_i).$$

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente demostrar el caso  $n = 2$ , porque el resultado general se deduce por inducción. Se observa que  $A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_2 =$

$A \cap E_2$  y  $A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_2^c = A \cap E_1$ . Como  $E_2$  es medible, se tiene

$$\begin{aligned} m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) &= m^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_2) + \\ &\quad m^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_2^c) \\ &= m^*(A \cap E_2) + m^*(A \cap E_1). \end{aligned}$$

□

El el lema si  $A = \mathbb{R}$ , se tiene que  $m^*(\bigcup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n m^*E_i$  cuando  $\{E_j\}_{j=1}^n$  es una colección de conjuntos medibles disjuntos.

TEOREMA 1.1. *La colección de conjuntos medibles  $\mathfrak{M}$  es una  $\sigma$ -álgebra.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\{E_n\}_{n=1}^\infty$  una colección de conjuntos medibles. Definimos  $F_1 = E_1$ ,  $F_2 = E_2 \cap F_1^c$ , ...,  $F_n = E_n \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1} F_i)^c$ . Se nota que cada  $F_n$  es medible;  $F_n \cap F_m = \emptyset$  si  $n \neq m$ ; y  $\bigcup_{i=1}^n E_i = \bigcup_{i=1}^n F_i \forall n \geq 1$  y  $n = \infty$ . Entonces es suficiente demostrar que  $\mathfrak{M}$  está cerrada bajo uniones numerables en el caso cuando los conjuntos son disjuntos.

Sea  $A$  un conjunto,  $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ , y  $G_n = \bigcup_{i=1}^n E_i$ . Cada  $G_n$  es medible y  $E^c \subset G_n^c$ . Se tiene que  $m^*A = m^*(A \cap G_n) + m^*(A \cap G_n^c) \geq m^*(A \cap G_n) + m^*(A \cap E^c)$ . El Lema 1.7 da  $m^*(A \cap G_n) = \sum_{i=1}^n m^*(A \cap E_i)$ . Entonces  $m^*A \geq \sum_{i=1}^n m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E^c)$ . Como esta última desigualdad es cierta para todo  $n \geq 1$ , se tiene que  $m^*A \geq \sum_{i=1}^\infty m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E^c)$ .

Teniendo en cuenta la subaditividad (Proposición 1.2), se tiene que

$$m^*A \geq m^*(A \cap (\bigcup_{n=1}^\infty E_n)) + m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

□

Este último teorema demuestra que la colección de conjuntos medibles  $\mathfrak{M}$  tiene una estructura muy fuerte. Ahora nos dedicaremos a demostrar que  $\mathfrak{M}$  contiene los conjuntos básicos. En particular, demostraremos que todo abierto está en  $\mathfrak{M}$ .

LEMA 1.8. *El intervalo  $(a, \infty)$  es medible.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $A$  un conjunto. Definimos  $A_1 = A \cap (a, \infty)$  y  $A_2 = A \cap (-\infty, a]$ . Se debe demostrar que  $m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq m^*(A)$ . Si  $m^*(A) = \infty$ , no hay nada que demostrar. Se fija  $\varepsilon > 0$ . Existe una colección

de intervalos abiertos  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \leq m^*(A) + \varepsilon$ . Se define  $I_n^1 = I_n \cap (a, \infty)$  y  $I_n^2 = I_n \cap (-\infty, a]$ .  $I_n^1$  y  $I_n^2$  son intervalos o están vacíos y  $l(I_n) = l(I_n^1) + l(I_n^2) = m^*I_n^1 + m^*I_n^2$ . Como  $A_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^1$ , se tiene que  $m^*(A_1) \leq m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*I_n^1$  y similarmente  $m^*A_2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n^2)$ . Entonces  $m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n^1) + \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \leq m^*(A) + \varepsilon$ . Como  $\varepsilon$  es arbitrario, concluimos que  $m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq m^*(A)$ .  $\square$

- OBSERVACIONES. (1) El intervalo  $(-\infty, a]$  es medible. Como  $(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, b - \frac{1}{n})$ , el intervalo  $(-\infty, b)$  es medible. Tomando complementos, observamos que  $[a, \infty)$  es medible. El intervalo  $(a, b)$  es medible porque  $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$ .
- (2) Como todo abierto es una unión numerable de intervalos abiertos, todo abierto es medible.
- (3) La  $\sigma$ -álgebra de Borel es la  $\sigma$ -álgebra que contiene a los conjuntos abiertos. Todo conjunto de Borel es medible. Es decir  $(\sigma\text{-álgebra de Borel}) \subset \mathfrak{M}$ .

DEFINICIÓN 1.3. Si  $E$  es un conjunto medible, se define la *medida de Lebesgue de  $E$* ,  $m(E) = m^*(E)$ .

La medida de Lebesgue tiene la desventaja de que no está definida para todo conjunto; pero el siguiente teorema nos dice que sí satisface la propiedad de aditividad sobre conjuntos disjuntos.

TEOREMA 1.2. Sea  $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$  una colección numerable de conjuntos medibles disjuntos. Entonces  $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} mE_n$ .

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la observación posterior Lema 1.7 y sub aditividad, tenemos  $\sum_{i=1}^n m(E_i) = m(\bigcup_{i=1}^n E_i) \leq m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ . Como el lado derecho de la desigualdad es independiente de  $n$ , tenemos que  $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} mE_n$ . La otra desigualdad es cierta por sub aditividad.  $\square$

PROPOSICIÓN 1.9. Sea  $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$  una colección numerable de conjuntos medibles.

$$i. m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(\bigcup_{j=1}^n E_n).$$

ii. Si  $E_{n+1} \subset E_n \forall n$  y  $mE_{n_0} < \infty$  para algún  $n_0$ , entonces

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} mE_n.$$

DEMOSTRACIÓN. Primero definimos los conjuntos  $F_n$  como en la demostración del Teorema 1.1.

$$\begin{aligned} \text{i. Tenemos } m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) &= m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(F_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n m(F_j) = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{j=1}^n F_j\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{j=1}^n E_j\right). \end{aligned}$$

ii. Definimos  $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$  y suponemos que  $m(E_1) < \infty$ .  $m(E_1 \cap E) = \sum_{j=1}^{\infty} mF_j = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n \cap E_{n+1}^c)$ . Como  $E$  es medible y  $E \subset E_1$ , tenemos  $m(E_1) = m(E_1 \cap E) + m(E_1 \cap E^c) = m(E) + m(E_1 \cap E^c)$ . Análogamente, tenemos  $m(E_n) = m(E_n \cap E_{n+1}) + m(E_n \cap E_{n+1}^c) = m(E_{n+1}) + m(E_n \cap E_{n+1}^c)$ . Como todas estas cantidades son finitas, tenemos que  $m(E_1 \cap E^c) = m(E_1) - m(E)$  y  $m(E_n \cap E_{n+1}^c) = m(E_n) - m(E_{n+1})$ . Entonces

$$\begin{aligned} m(E_1) - m(E) &= \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j \cap E_{j+1}^c) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j) - m(E_{j+1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n m(E_j) - m(E_{j+1}) \\ &= m(E_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_{n+1}). \end{aligned}$$

Como todas estas cantidades también son finitas, concluimos que  $m(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n)$ .  $\square$

EJEMPLO 1.1. Empezamos con  $E_0 = [0, 1]$  y eliminamos el tercio abierto central para obtener  $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ . En general, para obtener  $E_{n+1}$  de  $E_n$  quitamos el tercio abierto central de cada intervalo cerrado que está contenido en  $E_n$ . Por ejemplo,  $E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ . El conjunto clásico de Cantor es  $E = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$ . Es fácil ver que  $m(E_n) = (\frac{2}{3})^n$ . De la Proposición previa se deduce que  $m(E) = 0$ . Este conjunto es de interés porque no es numerable y tiene medida de Lebesgue cero.

El siguiente teorema nos dice que un conjunto medible  $E$  se puede aproximar con un abierto más grande y también con un cerrado más pequeño.

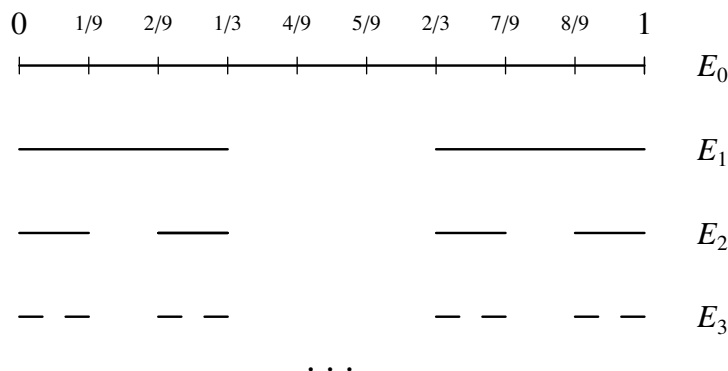


FIGURA 2. Conjunto clásico de Cantor.

TEOREMA 1.3. *Sea  $E$  un conjunto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- i.  $E$  es medible.
- ii. Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe un abierto  $A \supset E$  tal que  $m^*(A \cap E^c) < \varepsilon$ .
- iii. Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe un cerrado  $F \subset E$  tal que  $m^*(F^c \cap E) < \varepsilon$ .
- iv. Existe un conjunto  $G$  que es la intersección numerable de abiertos tal que  $E \subset G$  y  $m^*(G \cap E^c) = 0$ .
- v. Existe un conjunto  $F$  que es unión numerable de cerrados tal que  $F \subset E$  y  $m^*(F^c \cap E) = 0$ .

DEMOSTRACIÓN. (i. $\Rightarrow$ ii. en el caso en que  $m^*(E) < \infty$ ) Existen intervalos  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$  tales que  $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) < m^*(E) + \varepsilon$ . Como  $E$  es medible, se tiene que  $m^*(\cup_{n=1}^{\infty} I_n) = m^*(E \cap (\cup_{n=1}^{\infty} I_n)) + m^*(E^c \cap (\cup_{n=1}^{\infty} I_n)) = m^*(E) + m^*(E^c \cap (\cup_{n=1}^{\infty} I_n))$ . Entonces  $m^*(E) + \varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) \geq m^*(E) + m^*(E^c \cap (\cup_{n=1}^{\infty} I_n))$ . Si  $G = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$  tenemos  $m^*(G \cap E^c) < \varepsilon$ .

(i. $\Rightarrow$ ii.) Se define  $E_n = E \cap [-n, n]$ .  $E_n$  es medible y tiene medida finita. Podemos concluir que existen abiertos  $G_n$  tales que  $E_n \subset G_n$ ,  $m^*(G_n \cap E_n^c) < \frac{\varepsilon}{2^n}$  y  $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} G_n$ . Definimos  $G = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$ .  $m^*(G \cap E^c) = m^*(G \cap (\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^c) = m^*(G \cap (\cap_{n=1}^{\infty} E_n^c)) = m^*((\cup_{n=1}^{\infty} G_n) \cap (\cap_{n=1}^{\infty} E_n^c)) \leq m^*(\cup_{n=1}^{\infty} (G_n \cap E_n^c)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(G_n \cap E_n^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$ .

(ii. $\Rightarrow$ iv.) Ejercicio.

(iv. $\Rightarrow$ i.)  $G$  es medible y, como  $m^*(G \cap E^c) = 0$ ,  $G \cap E^c$  es medible y  $E = G \cap (G \cap E^c)^c$  también lo es.

(i. $\Rightarrow$ iii.)  $E^c$  es medible, luego existe un abierto  $G$  tal que  $E^c \subset G$  y  $m^*(G \cap (E^c)^c) < \varepsilon$ . Definimos  $F = G^c$ :  $F \subset E$  y  $m^*(F^c \cap E) = m^*(G \cap E) = m^*(G \cap (E^c)^c) < \varepsilon$ .

(iii. $\Rightarrow$ v.) Ejercicio.

(v. $\Rightarrow$ i.)  $F$  es medible y, como  $m^*(E \cap F^c) = 0$ ,  $E \cap F^c$  es medible luego  $E = F \cup (E \cap F^c)$  también lo es.  $\square$

### Ejercicios

3. Demuestre que, si  $E_1$  y  $E_2$  son medibles, entonces:

$$m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = mE_1 + mE_2.$$

4. ¿Es necesaria la condición “ $mE_{n_0} < \infty$  para algún  $n_0$ ” en la segunda parte de la Proposición 1.9?

5. Se definen los conjuntos:  $A_j = \bigcup_{k=1}^{j-1} \left( \frac{k}{j} - \frac{1}{j^3}, \frac{k}{j} + \frac{1}{j^3} \right)$ , para cada  $j \geq 2$ ;

$E_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j$ , para cada  $n \geq 2$ ; y finalmente  $E = \bigcap_{n=2}^{\infty} E_n$ .

a. Demuestre que  $m(E) = 0$ .

b. En lugar de  $\frac{1}{j^3}$  en la definición de  $A_j$ , ponemos  $\varepsilon_j$ . ¿Qué condición se le puede exigir a la sucesión  $\{\varepsilon_j\}$  para que la afirmación de la parte a siga siendo válida?

6. Demuestre que (ii. $\Rightarrow$ iv.) en el Teorema 1.3.

7. Demuestre que (iii. $\Rightarrow$ v.) en el Teorema 1.3.

8. Si  $E$  es medible y  $m(E) < \infty$ , demuestre que, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe una unión finita de intervalos abiertos  $U$  tal que  $m(U \Delta E) < \varepsilon$ . (La *diferencia simétrica* de dos conjuntos  $A$  y  $B$  es  $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$ .)

9. Sea  $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$  una sucesión de conjuntos medibles disjuntos y  $A \subset \mathbb{R}$ . Demuestre que

$$m^*(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A \cap E_j).$$

### 1.4. Dos Ejemplos

Para terminar de justificar la definición de conjunto medible es necesario dar un ejemplo de conjunto no medible, y para justificar la definición de la medida de Lebesgue es necesario dar un ejemplo de una colección numerable de conjuntos  $\{E_i\}$  tal que  $E_i \cap E_j = \emptyset$  cuando  $i \neq j$  y  $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) <$

$$\sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i).$$

Trabajamos en el intervalo  $[0, 1)$ . Si  $x, y \in [0, 1)$ , definimos  $x \sim y$  si  $x - y \in \mathbb{Q}$ . Esta es una relación de equivalencia y por lo tanto divide a  $[0, 1)$  en clases de equivalencia. Utilizando el Axioma de Elección, escogemos un representante de cada clase de equivalencia.<sup>3</sup> Consideramos el conjunto  $E$  de representantes y suponemos que este conjunto es medible. Sea  $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$  una enumeración de los racionales. Para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $(r_i + E) \bmod 1$  es una “translación rígida” del conjunto  $E$  y, por lo tanto  $(E + r_i)$ , es medible y  $m(E + r_i) = m(E)$ . También  $(E + r_i) \cap (E + r_j) = \emptyset$ , si  $i \neq j$ ; porque, si  $x + r_i = y + r_j$ , entonces que  $x - y = r_j - r_i \in \mathbb{Q}$  y en este caso  $x, y$  están en la misma clase de equivalencia y esto contradice la definición de  $E$ . También es obvio que  $\bigcup_{i=1}^{\infty} (E + r_i) = [0, 1)$ . Por lo tanto tenemos (como estamos suponiendo que  $E$  es medible) que

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E + r_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E + r_i) = 1.$$

Esto es imposible porque  $m(E + r_i) = mE \forall i$ , y por lo tanto  $\sum_{i=1}^{\infty} m(E + r_i) = \sum_{i=1}^{\infty} mE = 0$  o  $\infty$ . Esta contradicción demuestra que  $E$  no es medible.

Esta construcción también sirve para nuestro segundo ejemplo. Sea  $E_i = E + r_i$ . Ya comentamos que  $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = [0, 1)$  y por sub aditividad (Proposición 1.2) se tiene

$$1 = m^*[0, 1) = m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E).$$

---

<sup>3</sup>La construcción de los dos ejemplos de esta sección sin el Axioma de Elección será muy difícil.

Esta desigualdad nos dice que  $m^*E \neq 0$  (el valor de  $m^*(E)$  no está claro), y tenemos  $\sum_{i=1}^{\infty} m^*E = \infty$ . Por lo tanto

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) < \sum_{i=1}^{\infty} m^*E_i.$$

### 1.5. Funciones Medibles

PROPOSICIÓN 1.10. Sea  $f : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  una función con dominio medible. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i. Para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x : f(x) > \alpha\}$  es medible.
- ii. Para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x : f(x) \geq \alpha\}$  es medible.
- iii. Para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x : f(x) < \alpha\}$  es medible.
- iv. Para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x : f(x) \leq \alpha\}$  es medible.

DEMOSTRACIÓN. (i. $\Rightarrow$ iv.)  $\{x : f(x) \leq \alpha\} = \mathfrak{D} \cap \{x : f(x) > \alpha\}^c$ . Análogamente, (iv. $\Rightarrow$ i.) y (ii. $\Rightarrow$ iii.).

$$(i.\Rightarrow ii.) \{x : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\}.$$

$$(ii.\Rightarrow i.) \{x : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n}\}. \quad \square$$

DEFINICIÓN 1.4. Una función  $f : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  es medible si  $\mathfrak{D}$  es medible y si  $f$  satisface una de las condiciones de la Proposición 1.10.

PROPOSICIÓN 1.11. Si  $f$  es medible, se tiene que

- i. Para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\{x : f(x) = \alpha\}$  es medible.
- ii. Los conjuntos  $\{x : f(x) = \infty\}$  y  $\{x : f(x) = -\infty\}$  son medibles.
- iii. Para cada intervalo  $I$ ,  $\{x : f(x) \in I\}$  es medible.
- iv. Para cada abierto  $A$ ,  $\{x : f(x) \in A\}$  es medible.
- v. Para cada conjunto Borel  $E$ ,  $\{x : f(x) \in E\}$  es medible.

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio. □

PROPOSICIÓN 1.12. i. Para cada intervalo  $I$ ,  $\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & x \in I \\ 0 & x \notin I \end{cases}$  es medible.

ii. Toda función continua es medible.

DEMOSTRACIÓN. (i.) Ejercicio.

(ii.) Sea  $f$  una función continua con dominio medible. Para cualquier  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x : f(x) > \alpha\} = f^{-1}(\alpha, \infty)$  es abierto (bajo una función continua, la antimagen de un abierto es un abierto), y por lo tanto es medible.  $\square$

TEOREMA 1.4. Sea  $c \in \mathbb{R}$  y sean  $f$  y  $g$  dos funciones medibles reales con el mismo dominio. Las funciones  $f + c$ ,  $cf$ ,  $f + g$ ,  $f - g$ , y  $fg$  son medibles.

DEMOSTRACIÓN.  $(f + c)$ :  $\{x : f(x) + c < \alpha\} = \{x : f(x) < \alpha - c\}$ .

$$(cf): \{x : cf(x) < \alpha\} = \begin{cases} \emptyset \text{ o } \mathbb{R} & \text{si } c = 0 \\ \{x : f(x) < \frac{\alpha}{c}\} & \text{si } c > 0 \\ \{x : f(x) > \frac{\alpha}{c}\} & \text{si } c < 0. \end{cases}$$

$(f + g)$ : Si  $f(x) + g(x) < \alpha$ ,  $f(x) < \alpha - g(x)$  y existe un racional  $r$  tal que  $f(x) < r < \alpha - g(x)$ ; o sea  $f(x) < r$  y  $g(x) < \alpha - r$ . Recorriendo todos los números racionales con esta propiedad  $\{x : f(x) + g(x) < \alpha\} = \bigcup_r (\{x : f(x) < r\} \cap \{x : g(x) < \alpha - r\})$ .

$(fg)$ : Si  $\alpha \geq 0$ ,  $\{x : f^2(x) > \alpha\} = \{x : f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x : f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$  y si  $\alpha < 0$ ,  $\{x : f(x) > \alpha\} = \mathcal{D}$ . Entonces  $f^2$  es medible y  $fg = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}$ .  $\square$

TEOREMA 1.5. Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles con el mismo dominio. Las funciones  $\sup\{f_1, \dots, f_n\}$ ,  $\inf\{f_1, \dots, f_n\}$ ,  $\sup_n f_n$ ,  $\inf_n f_n$ ,  $\limsup f_n$  y  $\liminf f_n$  son medibles.

DEMOSTRACIÓN.  $(f(x) = \sup\{f_1, \dots, f_n\})$   $\{x : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{i=1}^n \{x : f_i(x) > \alpha\}$ . Análogamente para  $\sup_n f_n$ .

$(f(x) = \inf\{f_1, \dots, f_n\})$   $\{x : f(x) > \alpha\} = \bigcap_{i=1}^n \{x : f_i(x) > \alpha\}$ . Análogamente para  $\inf_n f_n$ .

$(\limsup f_n)$   $\limsup f_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_n$ . Análogamente para  $\liminf f_n$ .  $\square$

DEFINICIÓN 1.5. Se dice que una propiedad es cierta para *casi todo*  $x$  si es cierta excepto tal vez en un conjunto de medida 0.

EJEMPLO 1.2. Sean  $f(x) = 1$  y  $g(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ irracional;} \\ 0 & x \text{ racional.} \end{cases}$  Entonces  $f(x) = g(x)$  para casi todo  $x$ .

EJEMPLO 1.3. Supongamos que  $\{f_n\}$  es una sucesión de funciones. Si existe un conjunto  $E$  de medida 0 tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  para todo  $x \in E^c$ , se dice que  $f_n \rightarrow f$  para casi todo  $x$ .

La siguiente proposición nos dice que una función medible se aproxima con funciones bien conocidas.

PROPOSICIÓN 1.13. *Sea  $f$  una función medible definida en el intervalo  $[a, b]$  tal que  $m\{x : f(x) = \pm\infty\} = 0$ . Para cada  $\varepsilon > 0$ , existen una función continua  $h$  y una función escalonada  $g$  tales que*

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |f(x) - h(x)| < \varepsilon$$

*excepto en un conjunto de medida  $< \varepsilon$ .*

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver que, si  $g$  es una función escalonada, existe una función continua  $h$  tal que  $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$  excepto en un conjunto de medida  $< \varepsilon$ . También es fácil ver que, si  $m \leq g \leq M$ , se puede escoger  $h$  con la misma propiedad. Por lo tanto, es suficiente demostrar la parte del teorema que trata con la función escalonada  $g$ .

Primero reducimos el problema a cuando  $f$  está acotada. Para cada número natural  $n$ , se define  $E_n = \{x : |f(x)| \geq n\}$ .  $E_1 \subset [a, b]$ ,  $E_{n+1} \subset E_n$ , y  $\{x : f(x) = \pm\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ . Se tiene que  $m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n)$  por la Proposición 1.9. Entonces  $\exists N$  tal que  $\forall n \geq N$ ,  $mE_n < \varepsilon$ . Esto implica que  $m\{x : |f(x)| \geq N\} < \varepsilon$ , de lo cual se deduce que  $|f(x)| < N$  excepto en un conjunto de medida  $\varepsilon$ .

Sea el conjunto  $E = \{x : |f(x)| \leq M\}$ . Se divide el intervalo  $[-M, M]$  en intervalos de tamaño  $\leq \varepsilon$ ; es decir,  $[-M, M] = \bigcup_{i=1}^N I_n$  con  $m(I_i) \leq \varepsilon$ , y sea  $y_i$  el punto medio de  $I_i$ . Consideremos  $E_i = \{x : f(x) \in I_i\}$  y definamos  $\varphi(x) = \sum_{i=1}^N y_i \chi_{E_i}(x)$  donde  $\chi_{E_i}(x) = \begin{cases} 1 & x \in E_i; \\ 0 & x \notin E_i. \end{cases}$  Se tiene que  $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \forall x \in E$ .

Una de las consecuencias del Teorema 1.3 es que existe una unión finita de intervalos (finitos)  $\{I_{n,m}\}_{m=1}^{M_n}$  tales que  $m\left(E_n \Delta \left(\bigcup_{m=1}^{M_n} I_{n,m}\right)\right) < \frac{\varepsilon}{N}$ .

Se define  $\psi_n(x) = \sum_{m=1}^{M_n} y_i \chi_{I_{n,m}}(x)$ .  $\psi_n$  es una función escalonada tal que  $\psi_n(x) = \varphi(x)$  para todo  $x \in E_n$  excepto en un conjunto de medida  $< \frac{\varepsilon}{N}$ . Luego  $\sum_{n=1}^N \psi_n(x)$  también es una función escalonada tal que  $\varphi(x) = \sum_{n=1}^N \psi_n(x)$  excepto en un conjunto de medida  $\varepsilon$ . Finalmente, por la desigualdad triangular,  $|f(x) - \sum_{n=1}^N \psi_n(x)| < \varepsilon$  excepto en un conjunto de medida  $2\varepsilon$ . Por la construcción es obvio que, si  $m \leq f(x) \leq M$ , la función escalonada también tiene la misma propiedad.  $\square$

DEFINICIÓN 1.6. Una función  $\varphi$  se llama *simple* si su imagen consiste en un número finito de puntos. Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  son los puntos distintos de 0 en la imagen de  $\varphi$ , y si  $A_i = \{x : \varphi(x) = \alpha_i\}$ , se tiene que  $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}(x)$  y se dice que es la *representación canónica* de  $\varphi$ . (Mire la Figura 3.)

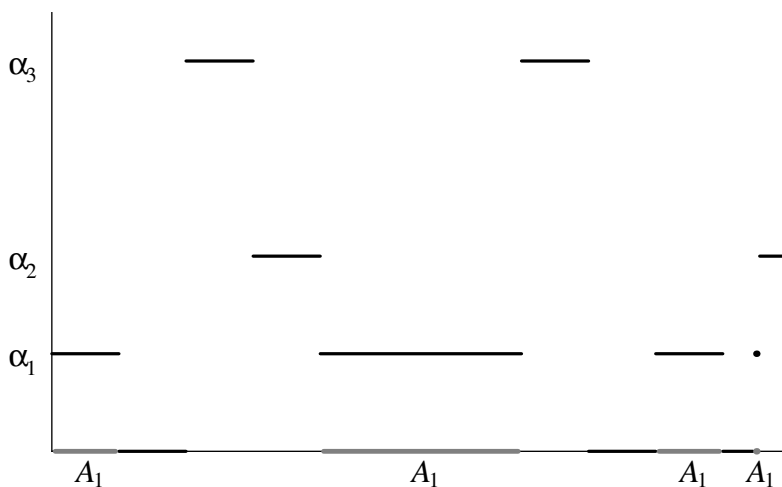


FIGURA 3. Conjunto  $A_1$  en representación canónica de la función simple  $\varphi$ .

OBSERVACIONES. Si  $\varphi$  y  $\psi$  son dos funciones simples y  $c \in \mathbb{R}$ :

- (1)  $\varphi + \psi$ ,  $\varphi\psi$ ,  $\varphi - \psi$ , y  $c\varphi$  son simples.

$$(2) \chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B, \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B, \\ \text{y } \chi_{A^c} = 1 - \chi_A.$$

Finalmente en esta sección demostramos el Teorema de Egórov (1913).

**TEOREMA 1.6.** *Suponemos que una sucesión de funciones medibles  $\{f_n\}$  converge hacia  $f$  para casi todo  $x \in E$ , un conjunto medible de medida finita. (Es decir, para casi todo  $x \in E$ , la sucesión de números reales  $\{f_n(x)\} \rightarrow f(x)$ .) Entonces, para cualquier  $\delta > 0$ , existe un conjunto medible  $E_\delta \subset E$  tal que*

- i.  $m(E_\delta) > m(E) - \delta$ ; o sea,  $m(E \cap E_\delta^c) < \delta$ ,*
- ii. la sucesión  $\{f_n(x)\}$  converge hacia  $f(x)$  uniformemente en el conjunto  $E_\delta$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Es claro que la función  $f$  es medible. Se define

$$E_n^m = \bigcap_{i \geq n} \left\{ x : |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \right\}.$$

(Para  $m$  y  $n$  fijos,  $E_n^m$  es el conjunto de todos los puntos  $x$  para los cuales  $|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$ ,  $\forall i \geq n$ .) Se define  $A_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m$ . Está claro que  $E_1^m \subset E_2^m \subset \dots$ , y utilizando el Proposición 1.9 se tiene que  $m A_m = \lim_{n \rightarrow \infty} m E_n^m$ . Por lo tanto, existe  $n_0(m)$  tal que  $m E_{n_0(m)}^m \geq m A_m - \frac{\delta}{2^m}$  y se tiene que  $m(A_m \cap (E_{n_0(m)}^m)^c) < \frac{\delta}{2^m}$ . Tomemos  $E_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}^m$ . Para cada  $x \in E_\delta$ ,  $|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$  cuando  $i \geq n_0(m)$ .

Para estimar el tamaño de  $E_\delta$  observamos que, si  $x_0 \in E \cap A_m^c$ , existen valores de  $i$  tan grandes como se quiera para los cuales  $|f_i(x_0) - f(x_0)| \geq \frac{1}{m}$ ; Es decir, la sucesión  $\{f_n(x_0)\}$  no converge a  $f(x_0)$ . Por hipótesis,  $m(E \cap A_m^c) = 0$ , luego  $m(E \cap (E_{n_0(m)}^m)^c) = m(A_m \cap (E_{n_0(m)}^m)^c) < \frac{\delta}{2^m}$ .

$$\text{Finalmente, } m(E \cap E_\delta^c) = m\left(E \cap \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}^m\right)^c\right) = m\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (E \cap (E_{n_0(m)}^m)^c)\right) \\ \leq \sum_{m=1}^{\infty} m(E \cap (E_{n_0(m)}^m)^c) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta. \quad \square$$

## Ejercicios

**10.** Demuestre la Proposición 1.11.

**11.** Demuestre (i.) de la Proposición 1.12.

**12.** Supongamos que  $f : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  es una función con dominio medible y que  $\{x : f(x) > \alpha\}$  es medible para cada  $\alpha \in \mathbb{Q}$ . Demuestre que  $f$  es medible.

**13.** Demuestre que, si  $f$  es una función medible y  $f = g$  para casi todo  $x$ , entonces  $g$  es medible.

**14.** Sea  $c \in \mathbb{R}$  y sean  $f, g$  funciones medibles tales que

$$m(\{x : f(x), g(x) = \{\pm\infty\}\}) = 0.$$

Demuestre que las funciones  $f + c$ ,  $cf$ ,  $f + g$ ,  $f - g$ , y  $fg$  son medibles. (Se advierte que parte de este problema es definir cantidades como  $\infty \cdot \infty$ ,  $c \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ , etc.)

**15.** Dé un ejemplo para demostrar que la condición “un conjunto de medida finita,” es necesaria en el Teorema 1.6.

## Capítulo 2

### La Integral de Lebesgue

#### 2.1. Repaso de la Integral de Riemann

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada y  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  una partición de  $[a, b]$ . Definimos

$$S = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i(f) \quad \text{y} \quad s = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i(f),$$

donde  $M_i(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$  y  $m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ .

DEFINICIÓN 2.1. La *integral superior de Riemann* de  $f$  en  $[a, b]$  es

$$\overline{R} \int_a^b f(x) dx = \inf S,$$

donde el ínfimo se calcula tomando todas las posibles particiones de  $[a, b]$ . Análogamente, la *integral inferior de Riemann* de  $f$  en  $[a, b]$  es

$$\underline{R} \int_a^b f(x) dx = \sup s,$$

donde el supremo se calcula tomando todas las posibles particiones de  $[a, b]$ .

Se observa que la integral superior de  $f$  siempre es mayor o igual que la integral inferior.

DEFINICIÓN 2.2. Si  $\underline{R} \int_a^b f(x) dx = \overline{R} \int_a^b f(x) dx$ , se dice que  $f$  es *integrable en el sentido de Riemann*, y se representa este valor común por  $\int_a^b f(x) dx$ .

EJEMPLO 2.1. Consideramos la función  $f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q}; \\ 1 & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$  Como hay

muchos más irracionales que racionales, queremos que la integral de esta función sobre cualquier intervalo sea 0. Pero se tiene que  $\overline{R} \int_a^b f(x) dx = b - a$

y  $\underline{R} \int_a^b f(x) dx = 0$ . Por tanto, esta función no es integrable en el sentido de Riemann. Este ejemplo simple demuestra una de las deficiencias de la integral de Riemann.

Antes de proceder con el desarrollo de la integral de Lebesgue, repasamos otra manera en la cual se pueden definir las integrales superiores e inferiores de una función acotada. Si  $\varphi(x)$  es una función escalonada, tal que  $\varphi(x) = c_i$  en  $x_{i-1} \leq x < x_i$  para alguna subdivisión de  $[a, b]$ , se tiene que  $\varphi$  es integrable en el sentido de Riemann y  $R \int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1})$ .

Ahora se nota que

$$\overline{R} \int_a^b f(x) dx = \inf \int_a^b \varphi(x) dx \quad \text{y} \quad \underline{R} \int_a^b f(x) dx = \sup \int_a^b \varphi(x) dx,$$

donde el ínfimo se toma entre todas las funciones escalonadas tal que  $\varphi(x) \geq f(x)$  y el supremo se toma entre todas las funciones escalonadas tal que  $\varphi(x) \leq f(x)$ . Esta idea será la central cuando definamos la integral de Lebesgue pero no utilizaremos funciones escalonadas sino funciones simples.

## 2.2. La Integral Sobre un Conjunto de Medida Finita

En esta sección, consideraremos el caso en que la función está acotada y la región de integración es de medida finita. La idea fundamental en el desarrollo de la integral de Riemann es la partición del dominio de la función. La idea fundamental de la integral de Lebesgue de una función acotada es la partición del recorrido de la función.

**DEFINICIÓN 2.3.** Si  $\varphi$  es una función simple que se anula fuera de un conjunto de medida finita y tiene representación canónica  $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$  (es decir  $\varphi(x) = a_i$  en  $A_i$ ), se define  $\int \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^n a_i m A_i$ . (Abreviamos  $\int \varphi$ .) Si  $E$  es un conjunto medible, definimos  $\int_E \varphi = \int \varphi \chi_E$ .

En general, no todas funciones simples están expresadas en representación canónica. Los siguientes dos resultados se dedican a la solución de la

dificultad que ocurre cuando una función simple no está expresada en forma canónica.

LEMA 2.1. *Sea  $\{E_i\}_{i=1}^n$  una colección de conjuntos medibles, disjuntos, y de medida finita. Si  $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ , entonces  $\int \varphi = \sum_{i=1}^n a_i mE_i$ .*

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio.  $\square$

PROPOSICIÓN 2.2. *Sean  $\varphi, \psi$  funciones simples que se anulan excepto en un conjunto de medida finita y  $a, b \in \mathbb{R}$ . Se tiene que*

- i.  $\int (a\varphi + b\psi) = a \int \varphi + b \int \psi$ .
- ii. Si  $\varphi \geq \psi$  para casi todo  $x$ ,  $\int \varphi \geq \int \psi$ .
- iii. Si  $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{G_i}$  y  $mG_i < \infty$ ,  $\int \varphi = \sum_{i=1}^n a_i mG_i$ .

DEMOSTRACIÓN. (i.) Sean  $\varphi = \sum a_i \chi_{E_i}$  y  $\psi = \sum b_i \chi_{F_i}$  las representaciones canónicas de  $\varphi$  y  $\psi$  y sean  $E_0$  y  $F_0$  los conjuntos donde  $\varphi$  y  $\psi$  se anulan, respectivamente. Se forman los conjuntos  $A_{i,j} = E_i \cap F_j$  para todo  $i, j$ .  $\bigcup_{i,j} A_{i,j}$  es una unión disjunta de conjuntos medibles y tenemos las representaciones

$$\varphi = \sum_{i,j} a_{i,j} \chi_{A_{i,j}} \quad \text{y} \quad \psi = \sum_{i,j} b_{i,j} \chi_{A_{i,j}},$$

Por lo tanto,  $a\varphi + b\psi = \sum_{i,j} (aa_{i,j} + bb_{i,j}) \chi_{A_{i,j}}$ . Por el lema:

$$\begin{aligned} \int a\varphi + b\psi &= \sum_{i,j} (aa_{i,j} + bb_{i,j}) mA_{i,j} = a \sum_{i,j} a_{i,j} mA_{i,j} + b \sum_{i,j} b_{i,j} mA_{i,j} \\ &= a \int \varphi + b \int \psi. \end{aligned}$$

(ii.)  $\int \varphi - \int \psi = \int (\varphi - \psi) \geq 0$  porque  $\varphi - \psi \geq 0$  para casi todo  $x$ .

(iii.) Si  $\varphi_i = a_i \chi_{G_i}$ ,  $\int \varphi_i = a_i mG_i$ .  $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i$  y, por lo tanto,  $\int \varphi = \int \sum_{i=1}^n \varphi_i = \sum_{i=1}^n \int \varphi_i = \sum_{i=1}^n a_i mG_i$ .  $\square$

Entre otras cosas, el siguiente teorema demuestra que es posible definir la integral de una función medible acotada utilizando funciones simples en una manera análoga a la definición de la integral de Riemann con funciones escalonadas.

TEOREMA 2.1. Sea  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada definida en un conjunto con medida finita  $E$ . Para que

$$\inf_{f \leq \psi} \int_E \psi(x) dx = \sup_{f \geq \varphi} \int_E \varphi(x) dx,$$

es necesario y suficiente que  $f$  sea medible.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $|f| \leq M$  y que  $f$  es medible. Lo siguiente es lo más importante en el desarrollo de la integral de Lebesgue: Se divide el recorrido de  $f$  en  $2n$  partes y, utilizando esta subdivisión, dividimos al conjunto  $E$ :

$$E_k = \left\{ x : \frac{k-1}{n}M < f(x) \leq \frac{k}{n}M \right\}, \quad -n \leq k \leq n.$$

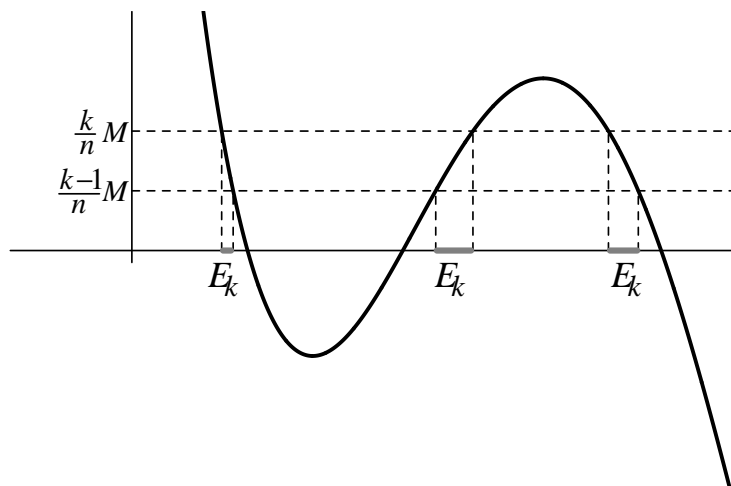


FIGURA 1. Ejemplo de uno de los  $E_k$  que divide a  $E$ .

Cada  $E_k$  es medible. Las funciones simples definidas por

$$\psi_n(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{k}{n} M \chi_{E_k} \quad \text{y} \quad \varphi_n(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{k-1}{n} M \chi_{E_k}$$

satisfacen  $\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x)$ . Se tiene que

$$\inf_{f \leq \psi} \int_E \psi(x) dx \leq \int \psi_n(x) dx = \sum_{k=-n}^n \frac{k}{n} M mE_k, \quad \text{y}$$

$$\sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi(x) dx \geq \int_E \varphi_n(x) dx = \sum_{k=-n}^n \frac{k-1}{n} M mE_k.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &\leq \inf_{f \leq \psi} \int_E \psi(x) dx - \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi(x) dx \\ &\leq \sum_{k=-n}^n \frac{k}{n} M mE_k - \sum_{k=-n}^n \frac{k-1}{n} M mE_k = \frac{M}{n} mE. \end{aligned}$$

Si  $n \rightarrow \infty$ , esta última cantidad converge a cero.

Supongamos ahora que  $\inf_{f \leq \psi} \int_E \psi(x) dx = \sup_{f \geq \varphi} \int_E \varphi(x) dx$ . Para cada  $n$  existen funciones simples  $\varphi_n$  y  $\psi_n$  tal que  $\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x)$  y  $\int_E \psi_n(x) dx - \int_E \varphi_n(x) dx < \frac{1}{n}$ . Las funciones  $\psi_{\text{inf}} = \inf \psi_n$  y  $\varphi_{\text{sup}} = \sup \varphi_n$  son medibles y  $\psi_{\text{inf}} \geq f \geq \varphi_{\text{sup}}$ . El conjunto  $F = \{x : \varphi_{\text{sup}}(x) < \psi_{\text{inf}}(x)\}$  es la unión de los conjuntos  $F_k = \{x : \varphi_{\text{sup}}(x) < \psi_{\text{inf}}(x) - \frac{1}{k}\}$ . Para cada  $n, k$ ,  $F_k \subset \{x : \varphi_n(x) < \psi_n(x) - \frac{1}{k}\}$ , y la manera en la que escogimos  $\psi_n$  y  $\varphi_n$  garantiza que este último conjunto tiene medida  $< \frac{k}{n}$ . Como  $n$  es arbitrario,  $mF_k = 0$ ; y por lo tanto,  $mF = 0$ . O sea,  $\psi_{\text{inf}} = \varphi_{\text{sup}}$  excepto (posiblemente) en un conjunto de medida cero. Como  $\varphi_{\text{sup}}$  es medible,  $f$  también lo es por el Problema 13 del Capítulo 1.  $\square$

DEFINICIÓN 2.4. Si  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  es una función medible acotada definida en un conjunto con medida finita  $E$ , se define la *integral de Lebesgue* de  $f$  sobre  $E$  por

$$\int_E f(x) dx = \inf_{\psi \geq f} \int_E \psi(x) dx,$$

donde el ínfimo se calcula entre todas las funciones simples  $\psi \geq f$ . (A causa de la equivalencia demostrada en el Teorema 2.1, esta cantidad iguala  $\sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi(x) dx$ .)

NOTACIÓN. Si  $E = [a, b]$ , se escribe  $\int_a^b f(x) dx$ . Si  $f = 0$  en  $E^c$ , se escribe  $\int f(x) dx$ . (Por lo tanto notamos que  $\int_E f = \int f \chi_E$ .)

PROPOSICIÓN 2.3. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Si  $f$  es integrable en el sentido de Riemann, entonces  $f$  es medible y  $R \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ .

DEMOSTRACIÓN. Como toda función escalonada también es simple, se tiene que

$$\underline{R} \int_a^b f(x) dx \leq \sup_{\varphi \leq f} \int_a^b \varphi(x) dx \leq \inf_{\psi \geq f} \int_a^b \psi(x) dx \leq \overline{R} \int_a^b f(x) dx.$$

Como  $f$  es integrable en el sentido de Riemann, las desigualdades son igualdades y  $f$  es medible por el Teorema 2.1.  $\square$

PROPOSICIÓN 2.4. *Sea  $E$  un conjunto de medida finita,  $a, b \in \mathbb{R}$ , y  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles y acotadas.*

- i.  $\int_E (af + bg) = a \int_E f + b \int_E g$ .
- ii. Si  $f = g$  para casi todo  $x \in E$ , entonces  $\int_E f = \int_E g$ .
- iii. Si  $f \leq g$  para casi todo  $x \in E$ , entonces  $\int_E f \leq \int_E g$ . Por lo tanto  $|\int_E f| \leq \int_E |f|$ .
- iv. Si  $A, B \subset E$  son medibles y disjuntos, entonces  $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$ .

DEMOSTRACIÓN. (i.) Primero demostraremos que  $\int_E af = a \int_E f$ . Si  $a = 0$ , no hay nada que demostrar. Si  $a \neq 0$ , se observa que  $\psi$  es una función simple si y sólo si  $a\psi$  es una función simple.

$$\begin{aligned} \int_E af &= \sup_{\varphi \leq af} \int_E \varphi \\ &= \begin{cases} \sup_{\frac{1}{a}\varphi \leq f} \int_E \varphi = \sup_{\psi \leq f} \int_E a\psi = a \sup_{\psi \leq f} \int_E \psi = a \int_E f & a > 0; \\ \sup_{\frac{1}{a}\varphi \geq f} \int_E \varphi = \sup_{\psi \geq f} \int_E a\psi = a \inf_{\psi \geq f} \int_E \psi = a \int_E f & a < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora demostraremos que  $\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$ . Si  $\varphi_1, \varphi_2$  son funciones simples tales que  $\varphi_1 \leq f$  y  $\varphi_2 \leq g$ ,  $\varphi_1 + \varphi_2$  es una función simple  $\leq f + g$ . Por lo tanto,  $\int_E f + g \geq \int_E (\varphi_1 + \varphi_2) = \int_E \varphi_1 + \int_E \varphi_2$ . El supremo del segundo miembro de la igualdad es  $\int_E f + \int_E g$ . O sea,  $\int_E f + g \geq \int_E f + \int_E g$ . La otra desigualdad se demuestra de una manera análoga.

(ii.) Como  $f - g = 0$  para casi todo  $x \in E$ , si  $\varphi \geq f - g$  es una función simple, entonces  $\varphi \geq 0$  para casi todo  $x \in E$  y  $\int_E \varphi \geq 0$ . Tenemos  $\int_E f - g = \inf_{\varphi \geq f - g} \int_E \varphi \geq 0$ . La otra desigualdad se demuestra de manera análoga.

(iii.) Se demuestra de manera idéntica al (ii.).

(iv.)  $\int_{A \cup B} f = \int f \chi_{A \cup B} = \int f (\chi_A + \chi_B) = \int f \chi_A + \int f \chi_B = \int_A f + \int_B f$ .  $\square$

La siguiente proposición servirá como un lema para demostrar y es un caso especial del famoso “Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue.”

**PROPOSICIÓN 2.5 (Convergencia Acotada).** *Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles definidas en un conjunto de medida finita  $E$ . Supongamos que  $|f_n(x)| \leq M \forall n, \forall x \in E$ , y que existe para cada  $x \in E$  la función límite  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Entonces*

$$\int_E f = \lim \int_E f_n.$$

(Es decir, que podemos intercambiar el límite y la integral:  $\lim \int_E f_n = \int_E \lim f_n$ .)

**DEMOSTRACIÓN.** La proposición es fácil si  $f_n \rightarrow f$  uniformemente. Fijamos  $\varepsilon > 0$ . Utilizando el Teorema de Egorov podemos encontrar  $N$  y un conjunto medible  $A \subset E$  tal que  $mA < \varepsilon$ , y tal que  $\forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in A^c \cap E$ . Se tiene

$$\begin{aligned} \left| \int_E f_n - \int_E f \right| &= \left| \int_E (f_n - f) \right| \leq \int_E |f_n - f| = \int_A |f_n - f| + \int_{E \cap A^c} |f_n - f| \\ &\leq 2M mA + \varepsilon m(E \cap A^c) < 2M \varepsilon + \varepsilon mE = (2M + mE) \varepsilon, \forall n \geq N. \end{aligned}$$

□

### Ejercicios

1. Demuestre el Lema 2.1.
2. Encuentre un ejemplo que demuestre que el hipótesis “ $|f_n(x)| \leq M, \forall n, \forall x \in E$ ” es necesario en la Proposición 2.5.
3. De un ejemplo de una sucesión de funciones medibles  $\{f_n\}$  definidas en  $[0, 1]$ , tal que  $f_n$  converge a 0 puntualmente y  $\int f_n dm = 1 \forall n$ . ¿Qué propiedad tienen que tener las funciones  $f_n$  en tal ejemplo?

### 2.3. La Integral de una Función No Negativa

Consideremos ahora el caso en que la función es no negativa pero no necesariamente acotada.

DEFINICIÓN 2.5. Sea  $f$  una función medible no negativa definida en un conjunto medible  $E$ , se define

$$\int_E f = \sup_{g \leq f} \int_E g$$

donde el supremo se calcula entre todas las funciones  $g$  que son medibles, acotadas, y que se anulan fuera de un conjunto de medida finita.

OBSERVACIONES. Se observa que, si  $f$  es acotada y  $mE < \infty$ , esta definición es equivalente a la anterior porque, si  $g \leq f$ ,  $\int_E g \leq \int_E f$ , y por lo tanto  $\sup_{g \leq f} \int_E g \leq \int_E f$ . Si  $f = g$ , se tiene que  $\int_E g = \int_E f$ , luego  $\sup_{g \leq f} \int_E g \geq \int_E f$ .

PROPOSICIÓN 2.6. *Supongamos que  $f, g$  son funciones medibles no negativas y  $E$  un conjunto medible:*

- i.  $\int_E cf = c \int_E f$ , si  $c > 0$ .
- ii.  $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$ . Por lo tanto, si  $A \cap B = \emptyset$ ,  $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$ .
- iii. Si  $f \leq g$  para casi todo  $x$ , entonces  $\int_E f \leq \int_E g$ .

DEMOSTRACIÓN. (i)  $\int_E cf = \sup_{h \leq cf} \int_E h = \sup_{k \leq f} \int_E ck = c \sup_{k \leq f} \int_E k = c \int_E f$ .

(ii.) Si  $h \leq f$  y  $k \leq g$ ,  $h + k \leq f + g$ , y se tiene  $\int_E f + \int_E g \leq \int_E f + g$ . Para obtener la otra desigualdad, supongamos que  $l$  es una función acotada que se anula fuera de un conjunto de medida finita y tal que  $l \leq f + g$ . Se define  $h(x) = \min\{f(x), l(x)\}$  y  $k(x) = l(x) - h(x)$ . Se tiene que  $h(x) \leq f(x)$  y  $k(x) \leq f(x) + g(x) - f(x) = g(x)$ .  $h$  y  $k$  son funciones medibles acotadas que se anulan fuera de un conjunto de medida finita.  $\int_E l = \int_E h + \int_E k \leq \int_E f + \int_E g$ . Tomando supremos utilizando todas las funciones  $l$ , se tiene  $\int_E f + g = \sup_{l \leq f+g} \int_E l \leq \int_E f + \int_E g$ .

$$(iii.) \int_E f = \sup_{h \leq f} \int_E h \leq \sup_{h \leq g} \int_E h = \int_E g. \quad \square$$

OBSERVACIONES. (1) Cuando  $f \geq 0$ ,  $\int_E f = 0$  para casi todo  $x \in E$  si y sólo si  $f = 0$ .

(2) Si  $m(E) = 0$ ,  $\int_E f = 0$ .

TEOREMA 2.2 (Lema de Fatou). *Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles no negativas tal que  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  (convergencia puntual) para casi todo  $x \in E$ . Se tiene*

$$\int_E f \leq \liminf \int_E f_n.$$

(Es decir,  $\int_E \lim f_n \leq \liminf \int_E f_n$ .)

DEMOSTRACIÓN. Si  $A \subset E$  es un subconjunto de  $E$  tal que  $m(E \cap A^c) = 0$ , entonces  $\int_A f = \int_E f$ , y  $\int_A f_n = \int_E f_n$ . Entonces podemos suponer que  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ,  $\forall x \in E$ .

Sea  $g$  una función medible acotada que es cero fuera de un conjunto de medida finita  $E'$  tal que  $g \leq f$ . Se define  $g_n(x) = \min\{g(x), f_n(x)\}$ . Se tiene que  $g_n$  está acotada por la misma cota que  $g$  y es cero fuera de  $E'$ . Se tiene que  $g_n(x) \rightarrow g(x)$  para cada  $x \in E'$ . Aplicando la Proposición 2.5, podemos concluir que

$$\int_E g = \int_{E'} g = \lim \int_{E'} g_n$$

El miembro derecho de esta igualdad también iguala  $\lim \int_E g_n$ , y, por su existencia, también iguala  $\liminf \int_E g_n$ . Finalmente  $g_n(x) \leq f_n(x)$ ,  $\forall x \in E$ , y por lo tanto  $\int_E g_n \leq \int_E f_n$ , y  $\liminf \int_E g_n \leq \liminf \int_E f_n$ . O sea  $\int_E g \leq \liminf \int_E f_n$ . Tomando el supremo sobre  $g$  se tiene  $\int_E f \leq \liminf \int_E f_n$ .  $\square$

TEOREMA 2.3 (Convergencia Monótona). *Sea  $\{f_n\}$  una sucesión creciente de funciones medibles no negativas definidas en un conjunto medible  $E$ , y sea  $f = \lim f_n$  la función límite. Se tiene que*

$$\int_E f = \lim \int_E f_n.$$

DEMOSTRACIÓN. El Lema de Fatou da  $\int_E f \leq \liminf \int_E f_n$ . Para cada  $n$ , se tiene  $f_n \leq f$  y por lo tanto  $\int_E f_n \leq \int_E f$ . Esto implica  $\limsup \int_E f_n \leq \int_E f$ .  $\square$

DEFINICIÓN 2.6. Una función medible no negativa se dice que es *integrable sobre el conjunto medible*  $E$  si  $\int_E f < \infty$ . Si  $E = \mathbb{R}$  la llamamos simplemente *integrable*.

Se observa que, si  $f \geq 0$  es integrable,  $m\{x : f(x) = \infty\} = 0$ .

COROLARIO 2.7. Si  $f$  es integrable y  $F(x) = \int_{-\infty}^x f$ , entonces  $F$  es continua.

DEMOSTRACIÓN. Fijamos  $x_0 \in \mathbb{R}$ , y demostremos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_0 - \frac{1}{n}) = F(x_0)$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_0 + \frac{1}{n}) = F(x_0)$ . Como  $f$  es no decreciente, esto es suficiente para demostrar continuidad. Primero se define  $f_n = f \chi_{(-\infty, x_0 - \frac{1}{n})}$ . La sucesión  $\{f_n\}$  es creciente y converge a  $f$ ,  $\forall x \in (-\infty, x_0)$ ; y, por el Teorema de Convergencia Monótona, se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{x_0} f_n = \int_{-\infty}^{x_0} f$ . O sea,  $F(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_0 - \frac{1}{n})$ . Para obtener el otro límite, observamos que  $\int_{-\infty}^x f = \int_{-\infty}^{\infty} f - \int_x^{\infty} f$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Definimos  $f_n = f \chi_{(x_0 + \frac{1}{n}, \infty)}$ . La sucesión  $\{f_n\}$  es creciente y converge a  $f$ ,  $\forall x \in (x_0, \infty)$ . Por el Teorema 2.3, se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^{\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0 + \frac{1}{n}}^{\infty} f = \int_{x_0}^{\infty} f$ . Esto implica que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(\infty) - F(x_0 + \frac{1}{n}) = F(\infty) - F(x_0)$ .  $\square$

COROLARIO 2.8. Sea  $\{u_n\}$  una sucesión de funciones medibles no negativas y  $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ . Se tiene que  $\int f = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n$ .

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio.  $\square$

COROLARIO 2.9. Sea  $f$  una función medible no negativa y  $\{E_i\}$  una sucesión de conjuntos medibles disjuntos. Entonces  $\int_{\cup E_i} f = \sum \int_{E_i} f$ .

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio.  $\square$

EJEMPLO 2.2. Si  $f$  es una función no negativa, se define una función cuyo dominio es la colección de conjuntos Borel  $\mu : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ,  $\mu(E) = \int_E f$ . Aplicando el corolario, para una colección  $\{E_i\} \subset \mathfrak{B}$  de conjuntos disjuntos

$$\begin{aligned} \mu(\cup E_i) &= \int_{\cup E_i} f = \int_{\mathbb{R}} f \chi_{\cup E_i} = \int_{\mathbb{R}} f \sum \chi_{E_i} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum f \chi_{E_i} = \sum \int_{\mathbb{R}} f \chi_{E_i} = \sum \int_{E_i} f = \sum \mu(E_i). \end{aligned}$$

Luego vemos que esta función  $\mu$  satisface la condición de aditividad sobre conjuntos disjuntos. Veremos que ésta es una manera de definir una “medida.”

**PROPOSICIÓN 2.10.** *Sean  $f, g$  funciones medibles no negativas. Si  $f$  es integrable sobre  $E$  y  $g(x) \leq f(x), \forall x \in E, g$  también es integrable y  $\int_E (f - g) = \int_E f - \int_E g$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Escribimos  $f = (f - g) + g$  y las funciones del lado derecho son no negativas, luego  $\int_E f = \int_E (f - g) + \int_E g$ . Como el primer miembro es finito, las dos integrales del segundo miembro también lo son.  $\square$

**PROPOSICIÓN 2.11.** *Sea  $f$  una función no negativa e integrable sobre un conjunto  $E$ . Para cada  $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que para todo  $A \subset E$  con  $m(A) < \delta$ , se tiene que  $\int_A f < \varepsilon$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $f$  está acotada, el problema es trivial. Se define

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq n; \\ n & \text{si } f(x) > n. \end{cases}$$

Cada  $f_n$  está acotada y  $f_n \rightarrow f$  puntualmente. El Teorema de Convergencia Monótona garantiza la existencia de  $N$  tal que  $\int_E f_N > \int_E f - \frac{\varepsilon}{2}$ ;  $\int_E (f - f_N) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Escojamos  $\delta < \frac{\varepsilon}{2N}$ : si  $m(A) < \delta$ , se tiene

$$\begin{aligned} \int_A f &= \int_A (f - f_N) + \int_A f_N < \int_E (f - f_N) + \int_A f_N < \frac{\varepsilon}{2} + N m A \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + N \frac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

## Ejercicios

4. Sea  $f$  una función medible no negativa.
  - a. Construya una sucesión de funciones simples  $\{\varphi_n\}$  tal que la sucesión sea no negativa, creciente, que cada función se anule fuera de un conjunto de medida finita, y  $f = \lim \varphi_n$ .
  - b. Demuestre que  $\int f = \sup \int \varphi$ , donde el supremo se calcula entre las funciones simples  $\varphi \leq f$ .

5. Dé un ejemplo donde la desigualdad del Lema de Fatou sea estricta.
6. Dé un ejemplo que demuestre que el Teorema de Convergencia Monótona no es cierto para una sucesión decreciente.
7. Demuestre que, si  $f \geq 0$  y  $m(\{x : f(x) = \infty\}) > 0$ , entonces  $f$  no es integrable.
8. Demuestre el Corolario 2.8.
9. Demuestre el Corolario 2.9.

### 2.4. La Integral General de Lebesgue

La idea de la definición general es tratar lo que ya hemos desarrollado para funciones no negativas.

DEFINICIÓN 2.7. Sea  $f$  una función medible, se define  $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$  y  $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ .

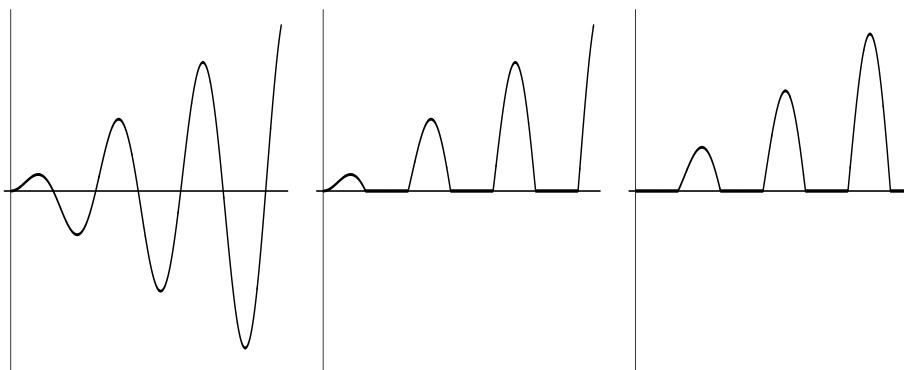


FIGURA 2. Gráficas de  $f$ ,  $f^+$  y  $f^-$ .

- OBSERVACIONES. (1)  $f^+$  y  $f^-$  son funciones medibles no negativas.  
 (2)  $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ .

$$(3) |f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

DEFINICIÓN 2.8. Una función medible se llama *integrable* sobre un conjunto medible  $E$  si  $f^+$  y  $f^-$  son integrables sobre  $E$ , y se escribe  $\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$ .

Se observa que  $f$  es integrable si y sólo si  $|f|$  es integrable.

PROPOSICIÓN 2.12. Sean  $f, g$  funciones integrables sobre  $E$  y  $c \in \mathbb{R}$ . Entonces:

- i. La función  $cf$  es integrable sobre  $E$  y  $\int_E cf = c \int_E f$ .
- ii. La función  $f + g$  es integrable sobre  $E$  y  $\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$ .
- iii. Si  $f \leq g$  para casi todo  $x \in E$ , entonces  $\int_E f \leq \int_E g$ .
- iv. Si  $A, B$  son conjuntos disjuntos contenidos en  $E$ , entonces  $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$ .

DEMOSTRACIÓN. (i.) Si  $c > 0$ ,  $cf = cf^+ - cf^-$ ; y, por la Proposición 2.6,  $\int_E cf^+ = c \int_E f^+$  y  $\int_E cf^- = c \int_E f^-$ . También se observa que todas estas cantidades son finitas. Estas dos observaciones establecen el resultado en el caso en que  $c > 0$ . Si  $c < 0$ ,  $(cf)^+ = -cf^-$ ,  $(cf)^- = -cf^+$ , y  $cf = -cf^- - (-cf^+)$ . Aplicando la Proposición 2.6, tenemos  $\int_E -cf^- = -c \int_E f^-$  y  $\int_E -cf^+ = -c \int_E f^+$ . Otra vez se observa que todas estas integrales son finitas y, por lo tanto,  $cf$  es integrable. Entonces  $\int_E cf = \int_E (-cf^-) - \int_E (-cf^+) = -c \int_E f^- + c \int_E f^+ = c \int_E f$ .

(ii.) Si  $h_1, h_2$  son funciones integrables no negativas y  $h = h_1 - h_2$ , tenemos que  $h^+ + h_2 = h^- + h_1$ . Por la Proposición 2.6,

$$\int_E h^+ + \int_E h_2 = \int_E h^- + \int_E h_1 \Rightarrow \int_E h = \int_E h_1 - \int_E h_2.$$

Si  $f$  y  $g$  son integrables, también lo son  $f^+ + g^+$  y  $f^- + g^-$ ; y como  $(f + g) = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$ , utilizamos la observación anterior para obtener

$$\begin{aligned} \int_E (f + g) &= \int_E (f^+ + g^+) - \int_E (f^- + g^-) \\ &= \int_E f^+ + \int_E g^+ - \int_E f^- - \int_E g^- = \int_E f + \int_E g. \end{aligned}$$

(iii.)  $\int_E (g - f) \geq 0$  y, por la parte (ii.),  $\int_E g \geq \int_E f$ .

$$(iv.) \int_{A \cup B} f = \int_E f \chi_{A \cup B} = \int_E f (\chi_A + \chi_B) = \int_E f \chi_A + \int_E f \chi_B = \int_A f + \int_B f. \quad \square$$

TEOREMA 2.4 (Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue).  
 Sea  $g$  una función integrable sobre  $E$  y  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  para casi todo  $x \in E$ , y tal que  $|f_n(x)| \leq g(x)$  para casi todo  $x \in E$ . Entonces

$$\int_E f = \lim \int_E f_n.$$

(O sea  $\int_E \lim f_n = \lim \int_E f_n$ .)

DEMOSTRACIÓN. La función  $g - f_n$  es no negativa y aplicando el Lema de Fatou, se tiene

$$\int_E (g - f) \leq \liminf \int_E (g - f_n).$$

Como  $|f| \leq g$  y  $g$  es integrable,  $f$  también lo es. Por lo tanto la desigualdad anterior se puede transformar en

$$\int_E g - \int_E f \leq \int_E g - \limsup \int_E f_n.$$

O sea,  $\int_E f \geq \limsup \int_E f_n$ . También  $\int_E (g + f) \leq \liminf \int_E (g + f_n)$ . Esto implica que  $\int_E f \leq \liminf \int_E f_n$ .  $\square$

COROLARIO 2.13. Supongamos que  $\{f_n\}$  es una sucesión de funciones integrables tal que  $\sum \int |f_n| < \infty$ . Entonces  $\sum f_n$  converge para casi todo  $x$  a una función integrable y  $\int \sum f_n = \sum \int f_n$ .

DEMOSTRACIÓN. Por el Corolario 2.8,  $\int \sum |f_n| = \sum \int |f_n|$ ; y, por lo tanto,  $\sum |f_n|$  es integrable. Entonces  $\sum |f_n(x)| < \infty$  para casi todo  $x$ , y se tiene que  $\sum f_n$  converge para casi todo  $x$ . También  $\left| \sum_{n=1}^N f_n \right| \leq \sum_{n=1}^N |f_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ , luego podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada a  $F_N = \sum_{n=1}^N f_n$  con  $g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ . Se tiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int F_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \sum_{n=1}^N f_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n. \quad \square$$

Finalmente definimos la integral de una función compleja.

DEFINICIÓN 2.9. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función compleja tal que  $f = f_r + if_i$  donde  $f_r, f_i$  son funciones reales. (Se observa que esta representación es única.) La función  $f$  es *integrable* sobre un conjunto medible  $E$  si  $f_r$  y  $f_i$  son integrables sobre  $E$ , y se define

$$\int_E f = \int_E f_r + i \int_E f_i.$$

- OBSERVACIONES. (1)  $|f| = \sqrt{|f_r|^2 + |f_i|^2} \leq |f_r| + |f_i| \leq 2|f|$ . Por lo tanto,  $f$  es integrable si y sólo si  $|f|$  es integrable.
- (2) Utilizando los resultados y técnicas desarrolladas hasta ahora; se puede demostrar que el conjunto de funciones complejas que son integrables tiene estructura de espacio vectorial complejo y que la integral de Lebesgue es una funcional lineal en este espacio.
- (3) Con las modificaciones adecuadas, los resultados de esta sección siguen siendo ciertos para funciones complejas.

### Ejercicios

10. Se define  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [n, n+1) \text{ cuando } n \text{ es impar;} \\ \frac{-1}{n} & \text{si } x \in [n, n+1) \text{ cuando } n \text{ es par.} \end{cases}$$

¿Existe  $\int_1^\infty f$ ?

11. a. Demuestre que  $f$  es integrable sobre un conjunto medible  $E$  si y sólo si  $|f|$  es integrable sobre  $E$ .
- b. Demuestre que si  $f$  es integrable sobre  $E$ , entonces  $|\int_E f| \leq \int_E |f|$ .
12. Sea  $f$  una función integrable sobre un conjunto medible  $E$  y  $\varepsilon > 0$ .
- a. Demuestre que existe una función simple  $\varphi$  tal que  $\int_E |f - \varphi| < \varepsilon$ . (Aplique el Problema 4.)
- b. Demuestre que existe una función escalonada  $\varphi$  tal que  $\int_E |f - \varphi| < \varepsilon$ .
- c. Demuestre que existe una función continua  $\varphi$  que se anula fuera de un intervalo finito tal que  $\int_E |f - \varphi| < \varepsilon$ .

**13.** Sean  $\{f_n\}, \{g_n\}, f$  y  $g$  integrables sobre un conjunto medible  $E$ . Supongamos que  $f_n \rightarrow f$  para casi todo  $x \in E$ ,  $|f_n| \leq g_n$ , y  $\lim \int_E g_n = \int_E g$ . Demuestre que  $\lim \int_E f_n = \int_E f$ .

**14.** Sean  $\{f_n\}$  y  $f$  integrables sobre un conjunto medible  $E$ . Supongamos que  $f_n \rightarrow f$  para casi todo  $x \in E$ . Demuestre que  $\lim \int_E |f_n - f| = 0$  si y sólo si  $\lim \int_E |f_n| = \int |f|$ .

## Capítulo 3

### Medidas Generales

#### 3.1. Medidas y Funciones Medibles

En este capítulo desarrollamos la teoría de funciones (“medidas”) que se comportan como la medida de Lebesgue en la recta real. También definimos el concepto de una función medible respecto a una medida.

**DEFINICIÓN 3.1.** Sea  $X$  un conjunto. Una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$  es una colección de conjuntos que contiene a  $\emptyset$  y que es cerrada por complementos y uniones numerables. Un *espacio medible* es un par ordenado  $(X, \mathfrak{B})$  tal que  $X$  es un conjunto y  $\mathfrak{B}$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$ . Un subconjunto  $A$  se llama *medible* si  $A \in \mathfrak{B}$ . Una *medida*  $\mu$  en el espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$  es una función no negativa definida para cada  $A \in \mathfrak{B}$ , que satisface (i.)  $\mu(\emptyset) = 0$  y (ii.)  $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu E_i$  para cualquier colección numerable de conjuntos disjuntos  $\{E_i\} \subset \mathfrak{B}$ . La terna  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  se llama *espacio de medida*.

**EJEMPLO 3.1.**  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{B} =$  conjuntos Borel,  $\mu(E) = \int_E f$  donde  $f \geq 0$ . (Si  $f = 1$ ,  $\mu = m$ .)

**EJEMPLO 3.2.** Sea  $X$  cualquier conjunto,  $\mathfrak{B} = \mathcal{P}(X)$  (el conjunto potencia de  $X$ ), y  $\mu(A) =$  número de elementos en  $A$ . A esta medida se le denomina “medida de contar.”

**PROPOSICIÓN 3.1.** Si  $A, B \in \mathfrak{B}$  y  $A \subset B$ , entonces  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

**DEMOSTRACIÓN.**  $B = A \cup (A^c \cap B)$  y esta unión es disjunta. Por lo tanto  $\mu(B) = \mu(A) + \mu(A^c \cap B) \geq \mu(A)$ .  $\square$

**PROPOSICIÓN 3.2.** Sea  $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{B}$  una colección numerable de conjuntos medibles:

$$i. \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^n E_j\right).$$

ii. Si  $E_{n+1} \subset E_n \forall n$  y  $\mu(E_{n_0}) < \infty$  para algún  $n_0$ ,  $\mu(\bigcap_n E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$ .

DEMOSTRACIÓN. Igual que la Proposición 1.9. □

PROPOSICIÓN 3.3. Si  $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{B}$ , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio. □

Ahora definimos un par de criterios que nos ayudaran a diferenciar entre espacios de medida.

DEFINICIÓN 3.2. Un conjunto  $E \in \mathfrak{B}$  es de *medida  $\sigma$ -finita* si  $E$  es una colección numerable de conjuntos con medida finita en  $\mathfrak{B}$ . Un espacio de medida  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  se llama  *$\sigma$ -finito* si  $X$  tiene medida  $\sigma$ -finita.

EJEMPLO 3.3.  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, m)$  es  $\sigma$ -finito.

EJEMPLO 3.4.  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \text{medida de contar})$  no es  $\sigma$ -finito, pero cualquier conjunto numerable es de medida  $\sigma$ -finita.

DEFINICIÓN 3.3. Un espacio de medida  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  se llama *completo* si todo subconjunto de un conjunto de medida cero está en  $\mathfrak{B}$ . (Es decir, es medible.) En este caso, también decimos que  $\mu$  es una *medida completa*.

EJEMPLO 3.5. El Lema 1.5 nos dice que la medida de Lebesgue es completa.

EJEMPLO 3.6. Sea  $X = \mathbb{R}$  y  $\mathfrak{B} = \{X, \emptyset\}$ . Si definimos  $\mu(X) = \mu(\emptyset) = 0$ , entonces  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  no es completo.

Ahora centremos nuestra atención en el problema de definir funciones adecuadas para nuestros espacios con medida. Utilizaremos un concepto casi idéntico al que utilizamos con la medida de Lebesgue.

PROPOSICIÓN 3.4. Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- i.  $\{x : f(x) < \alpha\} \in \mathfrak{B}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .
- ii.  $\{x : f(x) \leq \alpha\} \in \mathfrak{B}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

- iii.  $\{x : f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{B}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$   
 iv.  $\{x : f(x) \geq \alpha\} \in \mathfrak{B}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

DEMOSTRACIÓN. Igual que la Proposición 1.10.  $\square$

DEFINICIÓN 3.4. Una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  se llama *medible* con respecto a  $\mathfrak{B}$  si satisface una de las condiciones de la Proposición 3.4.<sup>1</sup>

PROPOSICIÓN 3.5. Sea  $c \in \mathbb{R}$  y sean  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  dos funciones medibles. Las funciones  $f + c, cf, f + g, f - g,$  y  $fg$  son medibles.

DEMOSTRACIÓN. Igual que el Teorema 1.4.  $\square$

TEOREMA 3.1. Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles. Las funciones  $\sup\{f_1, \dots, f_n\}, \inf\{f_1, \dots, f_n\}, \sup_n f_n, \inf_n f_n, \limsup f_n$  y  $\liminf f_n$  son medibles.

DEMOSTRACIÓN. Igual que el Teorema 1.5.  $\square$

DEFINICIÓN 3.5. Una *función simple* es una función de la forma  $\varphi = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}$ , donde  $c_k \in \mathbb{R}$  y  $E_k$  es medible para cada  $k$ .

PROPOSICIÓN 3.6. Sea  $f$  una función medible no negativa. Entonces existe una sucesión de funciones simples  $\{\varphi_n\}$  tales que  $\varphi_n \geq \varphi_{n-1}$  y  $f = \lim \varphi_n$  para cada  $x \in X$ . Si  $X$  es un espacio  $\sigma$ -finito, podemos escoger las funciones  $\varphi_n$  tal que  $\varphi_n = 0$  fuera de un conjunto de medida finita.

DEMOSTRACIÓN. Para cada par ordenado  $(n, k), k \geq 0, n \geq 1$ , se define  $E_{n,k} = \{x : \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}\}, E_\infty = \{x : f(x) = \infty\}$ , y

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n^n} \left( \frac{k}{n} \chi_{E_{n,k}}(x) \right) + n \chi_{E_\infty}(x).$$

Si  $f(x) < \infty, \exists N$  tal que  $N \leq f(x) < N+1$  y  $\forall n \geq N+1, |\varphi_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$ ; si  $f(x) = \infty, \varphi_n(x) = n$ . La sucesión  $\{\varphi_n\}$  es creciente y converge a  $f$ .

Si  $X$  es un espacio  $\sigma$ -finito,  $X = \bigcup_{j=1}^\infty F_j$  donde  $\mu(F_j) < \infty, \forall j$ , y en este caso se define

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n^n} \frac{k}{n} \chi_{E_{n,k} \cap (\bigcup_{j=1}^n F_j)}(x) + n \chi_{E_\infty \cap (\bigcup_{j=1}^n F_j)}(x).$$

$\square$

<sup>1</sup>Si la  $\sigma$ -álgebra de interés es evidente, no haremos referencia a ella.

**Ejercicios**

1. Demuestre que, si  $E_1, E_2$  son conjuntos medibles en el espacio de medida  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ , entonces  $\mu(E_1 \Delta E_2) = 0$  implica que  $\mu(E_1) = \mu(E_2)$ .

2. Suponga que  $\mu$  es completo. Demuestre que  $E_1 \in \mathfrak{B}$  y  $\mu(E_1 \Delta E_2) = 0$  implican que  $E_2 \in \mathfrak{B}$ .

3. Sea  $\{A_n\}_1^\infty$  una colección de conjuntos medibles en el espacio de medida  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ . Demuestre que  $\mu(\cup_1^\infty A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\cup_{k=1}^n A_k)$ .

4. Sea  $(X, \mathfrak{B})$  un espacio medible,  $\mu$  y  $\nu$  medidas definidas en  $\mathfrak{B}$ .
- Se define  $\lambda$  en  $\mathfrak{B}$  utilizando  $\lambda(E) = \mu(E) + \nu(E)$ . Demuestre que  $\lambda$  es una medida.
  - Suponga que  $\mu \geq \nu$ . Demuestre que existe una medida  $\lambda$  tal que  $\mu = \lambda + \nu$ .
  - Demuestre que si  $\nu$  es  $\sigma$ -finito, la medida  $\lambda$  en la parte **b** es única.

5. A una medida se le llama *semifinita* si todo conjunto medible de medida infinita contiene conjuntos medibles de medida finita pero arbitrariamente grande.

- Demuestre que toda medida que es  $\sigma$ -finita también es semifinita.
  - De un ejemplo de una medida que es semifinita pero no  $\sigma$ -finita.
  - Demuestre que toda medida  $\mu$  es la suma  $\mu_1 + \mu_2$  de una medida semifinita  $\mu_1$  y una medida  $\mu_2$  que sólo toma los valores 0 y  $\infty$ .
6. **a.** Demuestre que, si  $\mu$  es una medida completa,  $f$  una función medible, y  $g$  otra función tal que  $f = g$  para casi todo  $x$ , entonces  $g$  es medible.
- b.** Demuestre que la condición de que  $\mu$  sea completa es necesaria.

### 3.2. Construcción de Medidas

En general, las  $\sigma$ -álgebras son estructuras muy complejas y las medidas son funciones en ellas que satisfacen la condición no trivial de sub aditividad. En esta sección, trataremos el tema de construir medidas de funciones definidas en colecciones de conjuntos menos complejas que las  $\sigma$ -álgebras. Empezamos con la construcción que ya hemos definido.

DEFINICIÓN 3.6. Sea  $X$  un conjunto. Una función  $\mu^*$  definida en los subconjuntos de  $X$  que toma valores no negativos es una *medida exterior* si:

- i.  $\mu^*(\emptyset) = 0$ ,
- ii.  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$  si  $A \subset B$ ,
- iii. Si  $\{A_j\}$  es una colección numerable de subconjuntos de  $X$ , entonces

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

PROPOSICIÓN 3.7. Sea  $\mathfrak{E} \subset \mathcal{P}(X)$  una colección de subconjuntos de  $X$  tal que  $\emptyset \in \mathfrak{E}$ ,  $X \in \mathfrak{E}$ , y sea  $\rho : \mathfrak{E} \rightarrow [0, \infty]$  una función tal que  $\rho(\emptyset) = 0$ . Para cada  $A \in \mathcal{P}(X)$ , se define

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) : E_j \in \mathfrak{E} \text{ y } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}.$$

Entonces  $\mu^*$  es una medida exterior.

DEMOSTRACIÓN. El ínfimo existe porque, para cualquier  $A \subset X$ , se puede tomar  $E_j = X$  y  $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ . Como  $\rho(\emptyset) = 0$ ,  $\mu^*(\emptyset) = 0$ . Además, si  $A \subset B$ ,  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$  porque el ínfimo para calcular  $\mu^*(A)$  usa más conjuntos que el ínfimo para calcular  $\mu^*(B)$ . Sea  $\{A_j\}$  un sucesión de conjuntos y  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ . Fijemos  $\varepsilon > 0$ . Para cada  $A_j$ , existen  $\{E_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$  tales que  $A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{j,k}$ ,  $E_{j,k} \in \mathfrak{E}$  y  $\mu^*(A_j) + \varepsilon 2^{-j} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_{j,k})$ .  $A \subset \bigcup_{k,j=1}^{\infty} E_{j,k}$ , y  $\sum_{j,k=1}^{\infty} \rho E_{j,k} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \varepsilon$ . Luego  $\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \varepsilon$ . Como  $\varepsilon$  es arbitrario,  $\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$ .  $\square$

DEFINICIÓN 3.7. Si  $\mu^*$  es una medida exterior definida en  $X$ , y  $E \subset X$ ,  $E$  se llama  $\mu^*$ -medible si  $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$  para todo  $A \subset X$ .

Como  $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$ ,  $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ . Entonces  $E$  es medible si y sólo si  $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$  para todo  $A \subset X$  con  $\mu^*(A) < \infty$ .

TEOREMA 3.2 (Carathéodory 1918). *Si  $\mu^*$  es una medida exterior definida en  $X$ , la colección  $\mathfrak{C}$  de conjuntos  $\mu^*$ -medibles es una  $\sigma$ -álgebra y la restricción de  $\mu^*$  a  $\mathfrak{C}$  es una medida completa.*

DEMOSTRACIÓN. Como la definición 3.7 es simétrica,  $E \in \mathfrak{C}$  implica  $E^c \in \mathfrak{C}$ . Si  $E, F \in \mathfrak{C}$  y  $A \subset X$ , por sub aditividad:

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &= \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap F^c) + \\ &\quad \mu^*(A \cap E^c \cap F) + \mu^*(A \cap E^c \cap F^c) \\ &\geq \mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \cap (E \cup F)^c). \end{aligned}$$

Luego  $E \cup F \in \mathfrak{C}$  y  $\mathfrak{C}$  es cerrado por uniones finitas. También, si  $E \cap F = \emptyset$ ,

$$\mu^*(E \cup F) = \mu^*((E \cup F) \cap E) + \mu^*((E \cup F) \cap E^c) = \mu^*(E) + \mu^*(F).$$

Por lo tanto tenemos que, para toda colección finita de conjuntos disjuntos  $\{E_j\}_{j=1}^n$  en  $\mathfrak{C}$ ,  $\mu^*(\cup_{j=1}^n E_j) = \sum_{j=1}^n \mu^*(E_j)$ .

Si  $\{E_j\}_1^\infty$  es una colección numerable de conjuntos medibles, definimos  $F_n = E_n \cap (\cup_{j=1}^{n-1} F_j)^c$ .  $F_n$  es medible para cada  $n$ ,  $\cup E_n = \cup F_n$ , y la colección  $\{F_n\}$  es disjunta. Luego sólo debemos demostrar que  $\mathfrak{C}$  es cerrado por uniones numerables disjuntas.

Sea  $\{A_j\}$  una colección numerable de conjuntos disjuntos en  $\mathfrak{C}$ . Se define  $B_n = \cup_{j=1}^n A_j$  y  $B = \cup_{j=1}^\infty A_j$ . Para cada  $E \subset X$ :

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap B_n) &= \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) \\ &= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}). \end{aligned}$$

Por inducción, tenemos que  $\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap A_j)$ . Entonces

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c),$$

y, si  $n \rightarrow \infty$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c) \\ &\geq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (E \cap A_j)\right) + \mu^*(E \cap B^c) \\ &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c). \end{aligned}$$

O sea,  $B \in \mathfrak{B}$ . Si se toma  $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$  (es decir,  $B$ ), se tiene que

$$\mu^*(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

Finalmente, si  $\mu^*(A) = 0$ , para cada  $E \in X$ ,  $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E)$ . Luego  $A \in \mathfrak{C}$ . Es decir,  $\mu^*$  restringido a  $\mathfrak{C}$ , es completo.  $\square$

La construcción previa nos proporciona una manera de empezar con una función muy general  $\rho$  definida en una colección mínima de subconjuntos de  $X$ , y terminar con una  $\sigma$ -álgebra de conjuntos medibles de modo que nos de una medida. Ahora analizaremos el problema de extender una función que ya se comporte como medida en una colección de conjuntos con alguna estructura y extenderla a una función que sea una medida en una  $\sigma$ -álgebra. Específicamente, estudiaremos el problema de extender a una  $\sigma$ -álgebra una función que se comporta como una medida en una álgebra de conjuntos.

**DEFINICIÓN 3.8.** Si  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$  es una álgebra, una función  $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty]$  se llama *pre-medida* si satisface las siguientes dos condiciones:

- i.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
- ii. Si  $\{A_j\} \subset \mathfrak{A}$  es una colección numerable de conjuntos disjuntos, se tiene que  $\mu(\bigcup A_j) = \sum \mu(A_j)$ .

Observando la Proposición 3.7, vemos que una pre-medida induce una medida exterior en  $X$  definiendo

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_1^{\infty} \mu(A_j) : A_j \in \mathfrak{A}, E \subset \bigcup_1^{\infty} A_j \right\}.$$

**PROPOSICIÓN 3.8.** Si  $\mu$  es una pre-medida en una álgebra  $\mathfrak{A}$  y  $\mu^*$  es definida como arriba, se tiene que:

- i.  $\mu^*|_{\mathfrak{A}} = \mu$ .
- ii. Todo conjunto en  $\mathfrak{A}$  es  $\mu^*$ -medible.

DEMOSTRACIÓN. (i.) Si  $E \in \mathfrak{A}$  y  $E \subset \cup_1^\infty A_j$ , donde  $A_j \in \mathfrak{A}$ , definimos  $B_n = E \cap (A_n \cap (\cup_1^{n-1} A_j)^c)$ . La colección  $\{B_n\} \subset \mathfrak{A}$  es disjunta y  $\cup_1^\infty B_n = E$ . Se tiene que  $\mu(E) = \sum_1^\infty \mu(B_j) \leq \sum_1^\infty \mu(A_j)$ . Luego  $\mu(E) \leq \mu^*(E)$ . La otra desigualdad es obvia porque, si tomamos  $A_1 = E$  y  $A_n = \emptyset \forall n \geq 2$ ,  $\mu^*(E) \leq \sum_1^\infty \mu(A_j) = \mu(E)$ .

(ii.) Fijemos  $\varepsilon > 0$ . Si  $A \in \mathfrak{A}$  y  $E \subset X$ , hay una sucesión  $\{B_j\}_1^\infty \subset \mathfrak{A}$  con  $E \subset \cup_1^\infty B_j$  y  $\sum_1^\infty \mu(B_j) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$ . Como  $\mu$  es aditivo en  $\mathfrak{A}$ ,

$$\mu^*(E) + \varepsilon \geq \sum_1^\infty \mu(B_j \cap A) + \sum_1^\infty \mu(B_j \cap A^c) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Por lo tanto,  $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ .  $\square$

TEOREMA 3.3. Sea  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$  una álgebra,  $\mu$  una pre-medida en  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{C}$  la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathfrak{A}$ :

- i. Existe una medida  $\bar{\mu}$  definida en  $\mathfrak{C}$  cuya restricción a  $\mathfrak{A}$  es  $\mu$ . (Es decir,  $\bar{\mu} = \mu^*|_{\mathfrak{C}}$ , donde  $\mu^*$  es la medida exterior que induce  $\mu$ .)
- ii. Si  $\nu$  es cualquier otra medida definida en  $\mathfrak{C}$  que extiende a  $\mu$ , entonces  $\nu(E) \leq \bar{\mu}(E) \forall E \in \mathfrak{C}$  y  $\nu(E) = \bar{\mu}(E)$  si  $\bar{\mu}(E) < \infty$ .
- iii. Si  $\mu$  es  $\sigma$ -finita, entonces  $\bar{\mu}$  es la única extensión de  $\mu$  a una medida en  $\mathfrak{C}$ .

DEMOSTRACIÓN. (i.) Es consecuencia del Teorema 3.2 y de la Proposición 3.8.

(ii.) Si  $E \in \mathfrak{C}$  y  $\bar{\mu}(E) = \infty$ , entonces  $\forall \{A_j\}_1^\infty \subset \mathfrak{A}$  tal que  $E \subset \cup_1^\infty A_j$ , se tiene que  $\sum_1^\infty \mu(A_j) = \infty$ . Como  $\nu(A_j) = \mu(A_j) \forall j$ ,  $\nu(E) \leq \sum_1^\infty \nu(A_j) = \sum_1^\infty \mu(A_j) = \infty = \bar{\mu}(E)$ . Si  $\bar{\mu}(E) < \infty$ , fijando  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \{A_j\}_1^\infty \subset \mathfrak{A}$  tal que  $E \subset \cup_1^\infty A_j$  y  $\bar{\mu}(E) + \varepsilon \geq \sum_1^\infty \mu(A_j) = \sum_1^\infty \nu(A_j) \geq \nu(\cup_1^\infty A_j) \geq \nu E$ . Por lo tanto,  $\bar{\mu}(E) \geq \nu E$ . Obsérvese que, si  $A = \cup_1^\infty A_j$ , con  $\{A_j\}_1^\infty \subset \mathfrak{A}$ , entonces  $\nu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\cup_1^n A_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\cup_1^n A_n) = \bar{\mu}(A)$ . Como  $\bar{\mu}(E) < \infty$ , se puede encontrar  $\{A_j\}_1^\infty \subset \mathfrak{A}$  tal que  $E \subset A = \cup_1^\infty A_j$  y  $\bar{\mu}(A) < \bar{\mu}(E) + \varepsilon$ . Luego  $\bar{\mu}(A \cap E^c) < \varepsilon$  y  $\bar{\mu}(E) \leq \bar{\mu}(A) = \nu(A) = \nu(E) + \nu(A \cap E^c) \leq \nu(E) + \bar{\mu}(A \cap E^c) \leq \nu(E) + \varepsilon$ . Entonces  $\bar{\mu}(E) \leq \nu(E)$ .

(iii.) Si  $X = \cup_1^\infty A_j$ , con  $\bar{\mu}A_j < \infty$  y  $A_i \cap A_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ , entonces para cada  $E \in \mathfrak{C}$ :  $\bar{\mu}E = \sum_1^\infty \bar{\mu}(E \cap A_j) = \sum_1^\infty \nu(E \cap A_j) = \nu E$ .  $\square$

### Ejercicios

7. Sean  $\mu^*$  es una medida exterior definida en  $X$  y  $\{E_n\}_1^\infty$  una colección de conjuntos disjuntos que son  $\mu^*$ -medibles. Demuestre que para cualquier  $A \subset X$ ,  $\mu^*(A \cap (\cup_1^\infty E_n)) = \sum_1^\infty \mu^*(A \cap E_n)$ .

8. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función creciente y continua y sea  $\mathfrak{A} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \mathbb{R} \cup \emptyset$ . Si  $\{(a_i, b_i]\}_1^n$  es una colección de conjuntos en  $\mathfrak{A}$ , se define

$$\mu\left(\cup_1^n (a_i, b_i]\right) = \sum_1^n f(b_i) - f(a_i).$$

- Demuestre que  $\mathfrak{A}$  es una álgebra.
- Demuestre que  $\mu$  está bien definida.
- Demuestre que  $\mu$  es una pre-medida.

### 3.3. Integración

El desarrollo de la integración en espacios de medida generales es similar al desarrollo de la integral de Lebesgue. Como en ese caso, empezamos con funciones simples no negativas.

DEFINICIÓN 3.9. Sean  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  un espacio de medida,  $E \in \mathfrak{B}$  un conjunto medible, y  $\varphi(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}(x)$ , con  $c_k \geq 0, E_k \in \mathfrak{B}$ . Se define

$$\int_E \varphi d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \mu(E_k \cap E).$$

No es difícil demostrar que la integral de  $\varphi$  es independiente de la representación de  $\varphi$  y que es lineal en el espacio de funciones simples si  $c_k \geq 0$ .

DEFINICIÓN 3.10. Sea  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  un espacio de medida y  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  una función medible. Se define

$$\int f d\mu = \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi d\mu$$

donde el supremo se calcula entre las funciones simples  $0 \leq \varphi \leq f$ . La integral de  $f$  sobre un conjunto  $E \in \mathfrak{B}$  se define como  $\int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu$ .

PROPOSICIÓN 3.9. *Sean  $f$  y  $g$  funciones medibles no negativas.*

- i. *Si  $f(x) \leq g(x)$  para casi todo  $x$ ,  $\int f \leq \int g$ .*
- ii. *Si  $f = g$  para casi todo  $x$ ,  $\int f = \int g$ .*
- iii. *Si  $\int f = 0$ ,  $f = 0$  para casi todo  $x$ .*
- iv.  *$\int cf = c \int f$  para todo  $c \geq 0$ .*

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio. □

Observamos que la definición de la integral sobre espacios de medidas generales no es la misma que la definición de la integral sobre  $\mathbb{R}$ . (Esa integral se calcula utilizando un supremo sobre funciones que se anulan afuera de un conjunto de medida finita.) Esta diferencia es necesaria porque hay espacios de medida con estructura rara y donde la definición previa nos diera resultados inservibles. (Esto será tratado en los ejercicios.) La nueva definición hace más problemática la demostración de la linealidad de la integral. Por esta razón primero procedemos a demostrar los teoremas de convergencia.

TEOREMA 3.4 (Lema de Fatou). *Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles no negativas tal que  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  (convergencia puntual) para casi todo  $x \in E$ . Se tiene*

$$\int_E f \leq \liminf \int_E f_n.$$

(Es decir,  $\int_E \lim f_n \leq \liminf \int_E f_n$ .)

DEMOSTRACIÓN. A causa del problema 6 y de la Proposición 3.9, podemos asumir que  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  para todo  $x \in E$ . Debemos demostrar que si  $\varphi$  es una función simple  $\leq f$ , entonces  $\int_E \varphi \leq \liminf \int_E f_n$ .

Si  $\int_E \varphi < \infty$ , existe un conjunto medible  $F \subset E$  tal que  $\mu(F) < \infty$ ,  $\varphi(x) \neq 0 \forall x \in F$ , y  $\varphi = 0$  afuera de  $F$ . Fijamos  $\varepsilon > 0$ . Definimos

$$F_n = \{x \in E : f_k(x) > (1 - \varepsilon)\varphi(x) \forall k \geq n\}.$$

Tenemos que  $F_n$  es medible, que  $F_n \subset F_{n+1}$ ,  $\forall n$ , y que  $F \subset \bigcup_1^\infty F_n$ . Entonces

$(F \cap F_{n+1}^c) \subset (F \cap F_n^c) \forall n$ , y  $\bigcap_1^\infty (F \cap F_n^c) = \emptyset$ . La Proposición 3.2 garantiza que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F \cap F_n^c) = 0$ . Por lo tanto, existe  $n$  tal que  $\forall k \geq n$ ,  $\mu(F \cap F_k^c) < \varepsilon$ . Sea  $M$  el máximo de  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} \int_E f_k &\geq \int_{F_k} f_k \geq (1 - \varepsilon) \int_{F_k} \varphi \geq (1 - \varepsilon) \left[ \int_F \varphi - \int_{F \cap F_k^c} \varphi \right] \\ &\geq \int_F \varphi - \varepsilon \int_F \varphi - M \cdot \varepsilon = \int_E \varphi - \varepsilon \left[ \int_F \varphi + M \right]. \end{aligned}$$

Como  $\varepsilon$  es arbitrario, tenemos que  $\liminf \int_E f_k \geq \int_E \varphi$ .

El caso cuando  $\int_E \varphi = \infty$  lo dejamos como ejercicio.  $\square$

**TEOREMA 3.5** (Convergencia Monótona). *Sean  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles no negativas definidas en un conjunto medible  $E$ ,  $f = \lim f_n$  la función límite. Se supone  $f_n \leq f \forall n$ . Se tiene que*

$$\int_E f = \lim \int_E f_n.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Ya establecimos  $\int_E f_n \leq \int_E f$ , y por lo tanto  $\limsup \int_E f_n \leq \int_E f$ . Con el Lema de Fatou se concluye que

$$\int_E f \leq \liminf \int_E f_n \leq \limsup \int_E f_n \leq \int_E f.$$

$\square$

**TEOREMA 3.6.** *Si  $f$  y  $g$  son funciones no negativas y  $a \geq 0$ , se tiene que*

$$\int a f + g = a \int f + \int g.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Sean  $\{\varphi_n\}$  y  $\{\psi_n\}$  sucesiones crecientes de funciones simples que convergen para casi todo  $x$  a  $f$  y  $g$  respectivamente. Entonces  $\{a\varphi_n + \psi_n\}$  es una sucesión de funciones simples que converge a  $a f + g$ . El Teorema de Convergencia Monótona da

$$\begin{aligned} \int a f + g &= \lim \int a\varphi_n + \psi_n = \lim \left( a \int \varphi_n + \int \psi_n \right) \\ &= a \lim \int \varphi_n + \lim \int \psi_n = a \int f + \int g. \end{aligned}$$

$\square$

**COROLARIO 3.10.** *Sea  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  un espacio de medida y  $f$  una función no negativa definida en  $X$ . Definimos  $\nu(E) = \int_E f d\mu$  para cada  $E \in \mathfrak{B}$ . Entonces  $(X, \mathfrak{B}, \nu)$  es un espacio de medida.*

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio. □

**DEFINICIÓN 3.11.** A una función medible no negativa se le llama *integrable* con respecto a la medida  $\mu$  sobre el conjunto medible  $E$ , si  $\int_E f d\mu < \infty$ . A una función medible (no necesariamente no negativa) se le llama *integrable* si ambas  $f^+$  y  $f^-$  (definidas igual que en la Definición 2.7) son integrables y se define

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

**TEOREMA 3.7.** *Sean  $f$  y  $g$  integrables sobre el conjunto  $E$ . Entonces*

$$\int_E cf + g = c \int_E f + \int_E g.$$

DEMOSTRACIÓN. Igual que la Proposición 2.12. □

**TEOREMA 3.8 (Convergencia Dominada de Lebesgue).** *Sea  $g$  una función integrable sobre  $E$  y  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  para casi todo  $x \in E$ , y tal que  $|f_n(x)| \leq g(x)$  para casi todo  $x \in E$ . Entonces*

$$\int_E f = \lim \int_E f_n.$$

DEMOSTRACIÓN. Igual que el Teorema 2.4. □

## Ejercicios

**9.** Demuestre la Proposición 3.9.

**10.** Considere el espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$  donde  $\mathfrak{B} = \{X, \emptyset\}$ . Definimos la medida  $\mu$ :  $\mu(\emptyset) = 0$  y  $\mu(X) = \infty$ . ¿Qué debería igualar  $\int_X 1 d\mu$ ? ¿Cuáles son las funciones que se anulan afuera de un conjunto de medida finita?

**11.** Termine la demostración del Teorema 3.4.

**12. a.** Demuestre el Corolario 3.10.

**b.** Utilizando el mismo hipótesis, demuestre que para cualquier función simple no negativa  $\varphi$ ,  $\int \varphi d\nu = \int f\varphi d\mu$ .

**c.** Utilizando el mismo hipótesis, demuestre que para cualquier función medible no negativa  $g$ ,  $\int g d\nu = \int fg d\mu$ .

**13.** Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles no negativas. Demuestre que

$$\int \sum_1^{\infty} f_n = \sum_1^{\infty} \int f_n.$$

**14.** Sea  $f$  una función integrable en el espacio de medida  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ . Demuestre que para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta$  ( $\delta$  puede depender de  $\varepsilon$ ) tal que, para cada conjunto medible  $E$  de medida menor que  $\delta$  se tiene que  $\left| \int_E f d\mu \right| < \varepsilon$ .

**15.** Se supone que  $f$  es una función integrable en el espacio de medida  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ .

**a.** Demuestre que  $\mu(\{x \in X : f(x) = \pm\infty\}) = 0$ .

**b.** Demuestre que el conjunto  $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$  es  $\sigma$ -finito.

**16.** De un ejemplo de una sucesión de funciones medibles  $\{f_n\}$  en el espacio de medida  $([0, 1], \text{conjuntos Borel de } [0, 1], m)$  tal que  $f_n$  converge a 0 puntualmente y  $\int f_n dm = 1 \forall n$ .

**17.** Sean  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles y  $f$  una función medible en el espacio de medida  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ . Si para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  tal que

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon$$

para todo  $n \geq N$ , decimos que  $\{f_n\}$  converge en medida a  $f$ . Si para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  tal que

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon$$

para todos  $m, n \geq N$ , decimos que  $\{f_n\}$  es una sucesión Cauchy en medida.

**a.** Demuestre que una sucesión de funciones medibles  $\{f_n\}$  es Cauchy en medida si y sólo si la sucesión converge a alguna función medible  $f$ .

- b. Se supone que la sucesión  $\{f_n\}$  converge a una función medible  $f$  en medida. Demuestre que existe una subsucesión  $\{f_{n_k}\}$  tal que  $\{f_{n_k}(x)\}$  converge a  $f(x)$  para casi todo  $x \in X$ .

### 3.4. Medidas con Signo

En varias situaciones en análisis es necesario trabajar con funciones que se comportan como medidas pero que no necesariamente son no negativas. Estas funciones son el tema de esta sección.

DEFINICIÓN 3.12. Una *medida con signo* en el espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$  es una función  $\mu : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  o  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  tal que i.  $\mu(\emptyset) = 0$ ; ii.  $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$  para cada colección disjunta de conjuntos medibles  $\{E_i\}$ . Si  $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i)$  es finita se requiere que la serie converga absolutamente; si  $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = +\infty$  o  $-\infty$  se requiere que la serie “no converga” a uno de estos valores.

EJEMPLO 3.7. Sea  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  un espacio de medida y  $f$  una función integrable. Se define  $\nu(E) = \int_E f d\mu$ . Entonces  $\nu$  es una medida con signo en el espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$ .

DEFINICIÓN 3.13. Un conjunto medible  $A$  es *positivo* respecto a la medida  $\mu$  si  $\mu(A) \geq 0$  y para todo conjunto medible  $E \subset A$ , se tiene que  $\mu(E) \geq 0$ . Análogamente, se define un conjunto *negativo*. Un conjunto  $A$  se llama *nulo* si tiene medida cero y si todo subconjunto medible de  $A$  también tiene medida cero.

EJEMPLO 3.8. Sean  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{B} =$  conjuntos Borel y  $f(x) = xe^{-x^2}$ . Para cada  $E \in \mathfrak{B}$ , se define  $\mu(E) = \int_E f(x) dx$ . Se tiene que  $[0, \infty)$  es positivo,  $(-\infty, 0]$  es negativo, y todo conjunto con medida de Lebesgue 0 es nulo.  $\mu([-1, 2]) > 0$  pero  $[-1, 2]$  no es un conjunto positivo.  $\mu([-1, 1]) = 0$  pero  $[-1, 1]$  no es nulo. Los conjuntos  $(-\infty, 0)$  y  $(-\infty, 0]$  son negativos. Obsérvese que  $\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup (0, \infty)$ . Es decir, el conjunto  $X$  se puede descomponer en dos subconjuntos disjuntos uno positivo y otro negativo. Pronto veremos que esta propiedad es algo que todas las medidas con signo comparten.

LEMA 3.11. *La unión numerable de conjuntos positivos es positiva.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\{E_n\}_1^\infty$  una colección de conjuntos positivos. Definimos  $F_1 = E_1$ ,  $F_2 = E_2 \cap F_1^c$ ,  $\dots$ ,  $F_n = E_n \cap (\cup_{i=1}^{n-1} F_i)^c$ .  $F_n$  es positivo  $\forall n$ . Si  $E \subset (\cup_{n=1}^\infty E_n)$ ,  $E = \cup_{n=1}^\infty (E \cap F_n)$  y esta unión es disjunta. Por lo tanto:

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap F_n) \geq 0$$

porque cada  $F_n$  es positivo.  $\square$

OBSERVACIONES. El mismo resultado es cierto para conjuntos negativos.

LEMA 3.12. *Sea  $E$  un conjunto medible con  $0 < \mu(E) < \infty$ . Existe  $A \subset E$  tal que  $A$  es positivo y  $\mu(A) > 0$ .*

DEMOSTRACIÓN. Si  $E$  no es positivo, contiene conjuntos medibles de medida negativa. Sea  $n_1$  el entero positivo más pequeño tal que  $\exists E_1 \subset E$  con  $\mu(E_1) < -\frac{1}{n_1}$ . Procediendo por inducción, sea  $n_k$  el entero positivo más pequeño tal que existe un conjunto medible  $E_k \subset E \cap (\cup_{j=1}^{k-1} E_j)^c$  con  $\mu(E_k) < -\frac{1}{n_k}$ . Definimos  $A = E \cap (\cup_1^\infty E_k)^c$  y observamos que  $E = A \cup (\cup_1^\infty E_k)$  y que  $\mu(E) = \mu(A) + \sum_1^\infty \mu(E_k)$  porque la unión es disjunta. La serie converge absolutamente porque  $\mu(E) < \infty$ . Tenemos que  $\sum_1^\infty \frac{1}{n_k} < \infty$ , y por lo tanto  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} = 0$ . Como  $\mu(E) > 0$  y  $\sum_1^\infty \mu(E_k) < 0$ , concluimos que  $\mu(A) > 0$ .

Para demostrar que  $A$  es positivo, fijamos  $\varepsilon > 0$ . Se escoje  $k$  suficientemente grande para que  $\frac{1}{n_k-1} < \varepsilon$ . Como  $A \subset E \cap (\cup_1^k E_j)^c$ , la construcción de la sucesión  $\{n_k\}$  garantiza que si  $B \subset A$ ,  $\mu(B) > -\frac{1}{n_k-1} > -\varepsilon$ . La arbitrariedad de  $\varepsilon$  da que  $\mu(E) \geq 0$ .  $\square$

TEOREMA 3.9 (Descomposición de Hahn). *Sea  $\mu$  una medida con signo en el espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$ . Existe un conjunto positivo  $A$  y un conjunto negativo  $B$  tal que  $X = A \cup B$  y  $A \cap B = \emptyset$ .*

DEMOSTRACIÓN. Se supone que  $\mu \neq \infty$ . Sea  $\lambda = \{\sup \mu(A) : A \text{ es positivo con respecto a } \mu\}$ . (Se nota que el vacío es positivo y por lo tanto  $\lambda \geq 0$ .) Sea  $\{A_n\}_1^\infty$  una colección de conjuntos positivos tal que  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ . Se define  $A = \cup_1^\infty A_n$ .  $A$  es positivo y  $\lambda \geq \mu(A)$ . Como  $A \cap A_n^c \subset A$  y  $\mu(A \cap A_n^c) \geq 0$  para cada  $n$ , se tiene que  $\mu(A) = \mu(A_n) + \mu(A \cap A_n^c) \geq \mu(A_n)$ ,

y concluimos que  $\mu(A) \geq \lambda$  y que  $\lambda < \infty$ . Sea  $B = A^c$ . Si  $E \subset B$  es positivo,  $A \cup E$  es positivo y por lo tanto  $\lambda \geq \mu(A \cup E) = \mu(A) + \mu(E) = \lambda + \mu(E)$ . O sea  $\mu(E) = 0$ . Entonces  $B$  no contiene conjuntos positivos de medida positiva y el Lema 3.12 garantiza que no contiene conjuntos de medida positiva.  $\square$

La descomposición de Hahn no es única. (Por ejemplo, en el ejemplo previo la descomposición puede ser  $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$ .) Ahora enfocaremos nuestros esfuerzos en desarrollar una descomposición que sí es única.

Si  $\{A, B\}$  es una descomposición de Hahn para  $\mu$ , podemos definir dos medidas  $\mu^+(E) = \mu(E \cap A)$  y  $\mu^-(E) = -\mu(E \cap B)$ . Como  $X = A \cup B$ , se tiene que  $E = (E \cap A) \cup (E \cap B)$ . Esta es una unión disjunta y por lo tanto

$$\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E).$$

Se nota que  $\mu^+(B) = \mu^-(A) = 0$ .

**DEFINICIÓN 3.14.** Sean  $\mu$  y  $\nu$  medidas en el espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$ . Si existen conjuntos  $A, B \in \mathfrak{B}$  tal que  $A \cup B = X$ ,  $A \cap B = \emptyset$  y  $\mu(A) = \nu(B) = 0$ , se dice que  $\mu$  y  $\nu$  son *mutuamente singulares*. Se escribe  $\mu \perp \nu$ . Si  $\mu$  y  $\nu$  son medidas con signo, entonces  $\mu \perp \nu$  si  $|\mu| \perp |\nu|$ .

**TEOREMA 3.10** (Descomposición de Jordan). *Sea  $\mu$  una medida con signo en el espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$ . Existen dos medidas  $\mu^+$  y  $\mu^-$  en  $(X, \mathfrak{B})$  tal que  $\mu^+ \perp \mu^-$  y  $\mu = \mu^+ - \mu^-$ . Esta descomposición es única.*

**DEMOSTRACIÓN.** La existencia ya fue establecida. Ahora supongamos que  $\mu = \mu^+ - \mu^- = \nu^+ - \nu^-$  y que  $A_\mu, B_\mu, A_\nu, B_\nu$  son los conjuntos correspondientes. La diferencia simétrica  $A_\mu \Delta A_\nu = (A_\mu \cap A_\nu^c) \cup (A_\mu^c \cap A_\nu)$  y ambos de estos conjuntos son a la vez positivos y negativos. Por lo tanto son nulos. Similarmente para  $B_\mu \Delta B_\nu$ . Ahora para  $E \in \mathfrak{B}$ ,  $\mu^+(E) = \mu(E \cap A_\mu) = \mu(E \cap A_\nu) = \nu^+(E)$ . (Los detalles de la segunda igualdad son el propósito del primer ejercicio de esta sección.) Similarmente para  $\mu^-$  y  $\nu^-$ .  $\square$

**DEFINICIÓN 3.15.** A las medidas  $\mu^+$  y  $\mu^-$  se les llama la *variación positiva de  $\mu$*  y *variación negativa de  $\mu$*  respectivamente. A la medida  $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$  se llama la *variación total de  $\mu$* .

DEFINICIÓN 3.16. Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cap \{\pm\infty\}$  es integrable con respecto a  $\mu^+$  y  $\mu^-$ , se define

$$\int_E f d\mu = \int_E f d\mu^+ - \int_E f d\mu^-$$

para cada conjunto medible  $E$ .

### Ejercicios

**18.** Sean  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{B} =$  conjuntos Borel y  $f(x) = xe^{-x^2}$ . Para cada  $E \in \mathfrak{B}$ , se define  $\mu(E) = \int_E f(x) dx$ . ¿Cuál es la descomposición de Jordan en este caso?

**19.** Supongamos que  $\mu$  es una medida con signo en el espacio  $(X, \mathfrak{B})$ , que  $A, B \in \mathfrak{B}$  y que  $A \cap B^c$  y  $A^c \cap B$  son conjuntos nulos. Demuestre que para todo conjunto  $E \in \mathfrak{B}$ ,  $\mu(E \cap A) = \mu(E \cap B)$ .

**20.** ¿Sigue siendo cierta la conclusión del problema previo si el hipótesis es solamente  $\mu(A \Delta B) = 0$ ?

**21.** Sea  $\mu$  una medida con signo y  $E$  un conjunto medible.

a. Demuestre que  $-\mu(E) \leq \mu(E) \leq \mu^+(E)$ .

b. Demuestre que  $|\mu(E)| \leq |\mu|(E)$ .

**22.** Sea  $\mu$  una medida con signo en el espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$  y  $E \in \mathfrak{B}$ . Dé una cota para  $\left| \int_E f d\mu \right|$ .

**23.** Sean  $\mu$  y  $\nu$  medidas con signo en el espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$ . Demuestre que  $\mu \perp \nu$  si y sólo si  $|\mu| \perp \nu$  si y sólo si  $\mu^+ \perp \nu$  si y sólo si  $\mu^- \perp \nu$ .

**24.** Se supone que  $\{\mu_k\}_1^\infty$  es una colección de medidas tal que  $\mu_k \perp \mu \forall k$ . Demuestre que  $\sum_1^\infty \mu_k \perp \mu$ .

**25.** Demuestre que la colección de medidas con signo finitas en el espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$  tiene estructura natural de espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .

**26.** Sean  $\mu$  y  $\nu$  dos medidas con signo finitas.

a. Demuestre que para  $c \in \mathbb{R}$   $|c\mu| = |c||\mu|$ .

b. Demuestre  $|\mu + \nu| \leq |\mu| + |\nu|$ .

### 3.5. El Teorema Radon-Nikodym

La relación complementaria a mutuamente singular es la siguiente.

**DEFINICIÓN 3.17.** Sean  $\mu$  y  $\nu$  dos medidas definidas en el espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$ . La medida  $\nu$  es *absolutamente continua* con respecto a  $\mu$  si  $\nu(E) = 0$  para todo  $E \in \mathfrak{B}$  tal que  $\mu(E) = 0$ . Se escribe  $\nu \ll \mu$ . Si  $\mu$  y  $\nu$  son medidas con signo,  $\nu \ll \mu$  si  $|\nu| \ll |\mu|$ .

**EJEMPLO 3.9.** Sean  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  un espacio de medida y  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  una función medible. Para cada  $E \in \mathfrak{B}$  definimos  $\nu(E) = \int_E f d\mu$ . Entonces  $\nu \ll \mu$ .

El teorema Radon-Nikodym nos dice que cuando  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  es  $\sigma$ -finito, cualquier medida que es absolutamente continua con respecto a  $\mu$  ocurre en la manera como en el ejemplo.

**TEOREMA 3.11 (Radon-Nikodym).** Sean  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  un espacio  $\sigma$ -finito y  $\nu$  una medida definida en  $\mathfrak{B}$  tal que  $\nu \ll \mu$ . Entonces existe una función medible no negativa  $f$  tal que para cada  $E \in \mathfrak{B}$  se tiene que

$$\nu(E) = \int_E f d\mu.$$

Si  $g$  es cualquier otra función que satisface la conclusión del teorema, entonces  $g = f$  para todo  $x \in X$  excepto tal vez para  $x$  en un conjunto  $N \in \mathfrak{B}$  tal que  $\mu(N) = 0$ .<sup>2</sup>

La demostración del teorema requiere la construcción de una función. El siguiente lema la facilita.

**LEMA 3.13.** Sea  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  un espacio de medida y  $\{B_s\}_{s \in \mathbb{Q}}$  una colección de conjuntos medibles.

- i. Si  $B_s \subset B_t$  cuando  $s < t$ , entonces existe una función medible  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  tal que  $f(x) \leq s \forall x \in B_s$  y  $f(x) \geq s \forall x \in B_s^c$ .
- ii. Si  $\mu(B_s \setminus B_t)^3 = 0$  cuando  $s < t$ , entonces existe una función medible  $f$  tal que  $f(x) \leq s$  para casi todo  $x \in B_s$  y  $f(x) \geq s$  para casi todo  $x \in B_s^c$ .

<sup>2</sup>Esta propiedad se escribe para casi todo  $x$  con respecto a  $\mu$ .

<sup>3</sup> $A \setminus B = A \cap B^c$ .

DEMOSTRACIÓN. (i.) Para cada  $x \in X$  definimos  $f(x) = \inf\{s : x \in B_s\}$ ; si  $x \notin B_s \forall s \in \mathbb{Q}$ , entonces  $f(x) = \infty$ .<sup>4</sup> Si  $x \in B_s$ ,  $f(x) \leq s$ , y si  $x \notin B_s$ , entonces  $f(x) \geq s$ . Para demostrar que  $f$  es medible, observamos que si  $f(x) < s$ , entonces  $x \in B_t$  para algún  $t < s$ . También si  $x \in B_t$  para algún  $t < s$ ,  $f(x) \leq t < s$ . Por lo tanto  $\{x : f(x) < s\} = \bigcup_{t < s} B_t$ . Como la unión es numerable, el conjunto es medible.

(ii.) Definimos  $A = \bigcup_{s < t} (B_s \setminus B_t)$ . Como la unión es numerable,  $\mu(A) = 0$ . Ahora definimos  $B'_s = B_s \cup A$ . Si  $s < t$ , tenemos que  $B'_s \setminus B'_t = (B_s \setminus B_t) \setminus A = \emptyset$ . O sea  $B'_s \subset B'_t$  cuando  $s < t$ . Entonces la primera parte del lema garantiza la existencia de una función  $f$  tal que  $f(x) \leq s \forall x \in B'_s$  y  $f(x) \geq s \forall x \in (B'_s)^c$ . Entonces, excepto por los  $x \in A$ , tenemos que  $f(x) \leq s \forall x \in B_s$  y  $f(x) \geq s \forall x \in B_s^c$ .  $\square$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.11. Primero, tratamos el caso cuando  $\mu$  es finito. Para cada  $s \in \mathbb{Q}$ ,  $\nu - s\mu$  es una medida con signo. Sea  $(A_s, B_s)$  la descomposición de Hahn para  $\nu - s\mu$ . Definimos  $A_0 = X$  y  $B_0 = \emptyset$ . Observamos que  $(\nu - s\mu)(B_s \setminus B_t) \leq 0$ , y como  $B_s \setminus B_t = B_s \cap A_t$ , tenemos que  $(\nu - t\mu)(B_s \setminus B_t) \geq 0$ . Si  $t > s$ , entonces  $\mu(B_s \setminus B_t) = 0$ . Utilizando el lema, concluimos que existe una función medible  $f$  tal que para cada  $s \in \mathbb{Q}$ , tenemos que  $f(x) \geq s$  para casi todo  $x \in A_s$  y  $f(x) \leq s$  para casi todo  $x \in B_s$ . Como  $A_0 = X$ ,  $f(x) \geq 0$  para casi todo  $x \in X$  y por lo tanto podemos asumir que  $f(x) \geq 0 \forall x \in X$ .

Sea  $E \in \mathfrak{B}$  un conjunto cualquiera. Fijamos  $N \in \mathbb{N}$  y definimos para cada entero  $k \geq 0$

$$E_k = E \cap \left( B_{\frac{k+1}{N}} \setminus B_{\frac{k}{N}} \right), \text{ y } E_\infty = E \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{\frac{k}{N}}.$$

Entonces  $E = \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \cup E_\infty$  y esta unión es disjunta. Por lo tanto  $\nu(E) = \nu(E_\infty) + \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k)$ . Como  $E_k \subset \left( B_{\frac{k+1}{N}} \cap A_{\frac{k}{N}} \right)$ , tenemos que  $\frac{k}{N} \leq f(x) \leq \frac{k+1}{N} \forall x \in E_k$ . Por lo tanto

$$\frac{k}{N} \mu(E_k) \leq \int_{E_k} f d\mu \leq \frac{k+1}{N} \mu(E_k). \quad (1)$$

<sup>4</sup>En general,  $\inf \emptyset = \infty$ .

También  $(\nu - \frac{k}{N}\mu)(E_k) \geq 0$  y  $(\nu - \frac{k+1}{N}\mu)(E_k) \leq 0$ . Por lo tanto

$$\frac{k}{N} \mu(E_k) \leq \nu(E_k) \leq \frac{k+1}{N} \mu(E_k). \quad (2)$$

Las desigualdades (1) y (2) se combinan para dar

$$\nu(E_k) - \frac{1}{N} \mu(E_k) \leq \int_{E_k} f d\mu \leq \nu(E_k) + \frac{1}{N} \mu(E_k).$$

Si  $x \in E_\infty$ ,  $f(x) = \infty$ . Como  $(\nu - s\mu)(E_\infty) > 0 \forall s \in \mathbb{Q}$ ,  $\mu(E_\infty) > 0$  implica que  $\nu(E_\infty) = \infty$ . Si  $\mu(E_\infty) = 0$ ,  $\nu(E_\infty) = 0$  porque  $\nu \ll \mu$ . En ambos casos  $\nu(E_\infty) = \int_{E_\infty} f d\mu$ . Como  $E = \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k\right) \cup E_\infty$  es una unión disjunta, podemos concluir que

$$\nu(E) - \frac{1}{N} \mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq \nu(E) + \frac{1}{N} \mu(E).$$

Como  $\mu(E) < \infty$  y  $N$  arbitraria, tenemos que  $\nu(E) = \int_E f d\mu$ .

Si  $\mu$  es  $\sigma$ -finito, existen conjuntos medibles disjuntos  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$  tal que  $\mu(A_k) < \infty$  y  $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ . Para cada  $A_k$  podemos encontrar una función medible  $f_k$  no negativa definida en  $A_k$  tal que  $\nu(E \cap A_k) = \int_{E \cap A_k} f_k d\mu \forall E \in \mathfrak{B}$ .

Definimos  $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ . (Obviamente extendemos cada  $f_k$  a todo  $X$  definiendo  $f_k = 0$  afuera de  $A_k$ .) Entonces

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E \cap A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E \cap A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E \cap A_k} f_k d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E \cap A_k} f d\mu = \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} (E \cap A_k)} f d\mu = \int_E f d\mu. \end{aligned}$$

La demostración de la unicidad de la función  $f$  la dejamos como ejercicio.  $\square$

DEFINICIÓN 3.18. Si  $\nu \ll \mu$ , a la función  $f$  tal que  $\nu(E) = \int_E f d\mu \forall E \in \mathfrak{B}$  se le llama la *derivada de Radon-Nikodym* de  $\nu$  con respecto a  $\mu$ . Esta función se denota  $\left[\frac{d\nu}{d\mu}\right]$ . Utilizando esta notación tenemos que  $\nu(E) =$

$$\int_E \left[\frac{d\nu}{d\mu}\right] d\mu.$$

**TEOREMA 3.12** (Descomposición de Lebesgue). *Sea  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  un espacio de medida  $\sigma$ -finito y  $\nu$  una medida  $\sigma$ -finita definida en  $\mathfrak{B}$ . Entonces existen medidas únicas  $\nu_0$  y  $\nu_1$  tal que  $\nu_0 \perp \mu, \nu_1 \ll \mu$  y  $\nu = \nu_0 + \nu_1$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** La medida  $\lambda = \nu + \mu$  es  $\sigma$ -finita. También  $\mu \ll \lambda$  y  $\nu \ll \lambda$ . Entonces existen funciones no negativas  $\left[\frac{d\mu}{d\lambda}\right]$  y  $\left[\frac{d\nu}{d\lambda}\right]$  tal que  $\mu(E) = \int_E \left[\frac{d\mu}{d\lambda}\right] d\lambda$  y  $\nu(E) = \int_E \left[\frac{d\nu}{d\lambda}\right] d\lambda \forall E \in \mathfrak{B}$ .

Definimos  $A = \{x : \left[\frac{d\mu}{d\lambda}\right](x) > 0\}$  y  $B = \{x : \left[\frac{d\mu}{d\lambda}\right](x) = 0\}$ . Entonces  $X = A \cup B$  es una unión disjunta y  $\mu(B) = 0$ . Definimos

$$\nu_0(E) = \nu(E \cap B) \quad \text{y} \quad \nu_1(E) = \nu(E \cap A) = \int_{E \cap A} \left[\frac{d\nu}{d\lambda}\right] d\lambda$$

Tenemos que  $\nu_0(A) = 0$ ,  $\nu_0 \perp \mu$  y obviamente  $\nu = \nu_0 + \nu_1$ . Falta demostrar que  $\nu_1 \ll \mu$ .

Si  $E \in \mathfrak{B}$  y  $\mu(E) = 0$ , entonces  $\int_E \left[\frac{d\mu}{d\lambda}\right] d\lambda = 0$  y como  $\left[\frac{d\mu}{d\lambda}\right] \geq 0$ , tenemos que  $\left[\frac{d\mu}{d\lambda}\right](x) = 0$  para casi todo  $x \in E$  con respecto a  $\lambda$ . Ahora, como  $\left[\frac{d\mu}{d\lambda}\right](x) > 0 \forall x \in A \cap E$ , tenemos que  $\lambda(A \cap E) = 0$ . Por lo tanto  $\nu(A \cap E) = 0$ .

La demostración de la unicidad de  $\nu_0$  y  $\nu_1$  la dejamos como ejercicio.  $\square$

### Ejercicios

- 27. a.** Sean  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  medidas en el espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$ . Demuestre que existe una medida  $\mu$  tal que  $\mu_i \ll \mu \forall 1 \leq i \leq k$ .
- b.** Se supone que  $\{\mu_k\}_1^\infty$  es una colección de medidas tal que  $\mu_k \ll \mu \forall k$ . Demuestre que  $\sum_1^\infty \mu_k \ll \mu$ .
- 28.** Demuestre la unicidad de la función en  $f$  el Teorema 3.11.
- 29.** Demuestre la unicidad de las medidas  $\nu_0$  y  $\nu_1$  en el Teorema 3.12.
- 30.** Encuentre un ejemplo que demuestre que el hipótesis de que la medida sea  $\sigma$ -finita es necesario en el teorema Radon-Nikodym.

**31.** Demuestre las siguientes propiedades de la derivada Radon-Nikodym.

a. Si  $\nu \ll \mu$  y  $f \geq 0$  es una función medible, entonces

$$\int f d\nu = \int f \left[ \frac{d\nu}{d\mu} \right] d\mu.$$

b.  $\left[ \frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} \right] = \left[ \frac{d\nu_1}{d\mu} \right] + \left[ \frac{d\nu_2}{d\mu} \right]$ .

c. Si  $\nu \ll \mu \ll \lambda$ , entonces  $\left[ \frac{d\nu}{d\lambda} \right] = \left[ \frac{d\nu}{d\mu} \right] \left[ \frac{d\mu}{d\lambda} \right]$ .

d. Si  $\nu \ll \mu$  y  $\mu \ll \nu$ , entonces  $\left[ \frac{d\nu}{d\mu} \right] = \left[ \frac{d\mu}{d\nu} \right]^{-1}$ .

### 3.6. Medidas Producto

En esta sección estudiamos el problema de definir una medida en un espacio producto.

DEFINICIÓN 3.19. Sean  $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  y  $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$  espacios de medida. Un *rectángulo medible* es un conjunto de la forma  $A \times B$  donde  $A \in \mathfrak{A}$  y  $B \in \mathfrak{B}$ . Si  $A \times B$  es un rectángulo medible, definimos  $\lambda(A \times B) = \mu(A) \nu(B)$ .

LEMA 3.14. *La colección de uniones finitas de rectángulos es una álgebra.*

DEMOSTRACIÓN. Se debe demostrar que el complemento de un rectángulo medible es una unión finita de rectángulos medibles. Si  $A \times B$  es un rectángulo medible, su complemento es  $(A^c \times Y) \cup (X \times B^c)$ .  $\square$

LEMA 3.15. *Sea  $\{(A_j \times B_j)\}_1^\infty$  una colección disjunta numerable de rectángulos medibles cuya unión también es un rectángulo medible  $A \times B$ . Entonces  $\lambda(A \times B) = \sum \lambda(A_j \times B_j)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Para cada  $x \in X$  y  $y \in Y$ , se tiene

$$\chi_A(x) \chi_B(y) = \chi_{(A \times B)}(x, y) = \sum \chi_{(A_j \times B_j)}(x, y) = \sum \chi_{A_j}(x) \chi_{B_j}(y).$$

Integrando con respecto a  $x$ , y utilizando la aditividad de la integral (Ejercicio 13) obtenemos

$$\begin{aligned} \int \chi_A(x) \chi_B(y) d\mu(x) &= \int \sum \chi_{A_j}(x) \chi_{B_j}(y) d\mu(x) \\ \mu(A) \chi_B(y) &= \sum \chi_{B_j}(y) \int \chi_{A_j}(x) d\mu(x) \\ &= \sum \mu(A_j) \chi_{B_j}(y). \end{aligned}$$

Integrando con respecto a  $y$  obtenemos  $\mu(A)\nu(B) = \sum \mu(A_j)\nu(B_j)$ .  $\square$

Entonces  $\lambda$  satisface las condiciones del Teorema 3.3 y se puede extender a una medida en la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$  generada por las uniones finitas de rectángulos medibles. A esta medida se le llama la *medida producto* de  $\mu$  y  $\nu$  y se escribe  $\mu \times \nu$ . Si  $\mu$  y  $\nu$  son finitos,  $\mu \times \nu$  también lo es; si  $\mu$  y  $\nu$  son  $\sigma$ -finitos,  $\mu \times \nu$  también lo es.

Ahora demostramos algunos resultados que nos dan información sobre la estructura de  $(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$ . Si  $E \subset X \times Y$  para cada  $x \in X$  y  $y \in Y$  definimos la  $x$ -sección  $E_x$  y la  $y$ -sección  $E^y$  de  $E$  por

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}, \quad E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

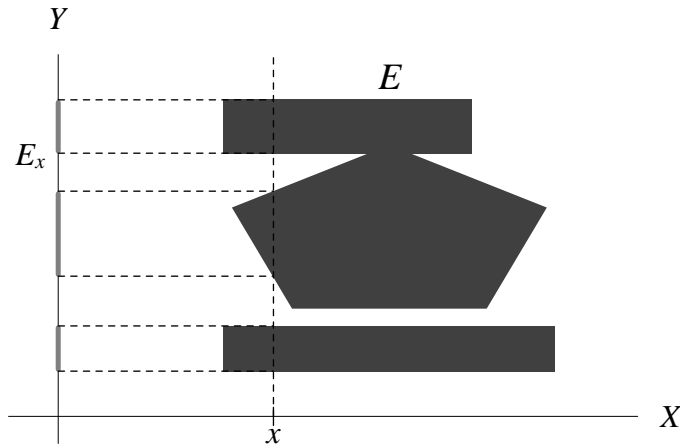


FIGURA 1. Muestra de un conjunto  $E_x$ .

Si  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  es una función, definimos la  $x$ -sección  $f_x$  y la  $y$ -sección  $f^y$  de  $f$  por  $f_x(y) = f^y(x) = f(x, y)$ .

LEMA 3.16. Si  $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ , entonces  $E_x \in \mathfrak{B}$  para todo  $x \in X$  y  $E^y \in \mathfrak{A}$  para todo  $y \in Y$ . Si  $f$  es  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ -medible, entonces  $f_x$  es  $\mathfrak{B}$ -medible para todo  $x \in X$  y  $f^y$  es  $\mathfrak{A}$ -medible para todo  $y \in Y$ .

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente demostrar la primera parte del lema porque para cualquier subconjunto  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $(f_x)^{-1}(E) = (f^{-1}(E))_x$  y  $(f^y)^{-1}(E) = (f^{-1}(E))^y$ .

La colección

$$\mathfrak{G} = \{F \subset (X \times Y) : F_x \in \mathfrak{B} \forall x \in X, \text{ y } F^y \in \mathfrak{A} \forall y \in Y\}$$

contiene a todos los rectángulos medibles porque si  $A \times B$  es un rectángulo medible  $(A \times B)_x = \begin{cases} B & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases}$ ; y similarmente para  $(A \times B)^y$ . Si  $A_j \in \mathfrak{G}$  entonces  $(\cup_1^\infty A_j)_x = \cup_1^\infty (A_j)_x$  y  $(A_x)^c = (A^c)_x$ ; y similarmente para  $(\cup_1^\infty A_j)^y$ . Por lo tanto,  $\mathfrak{G}$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los rectángulos medibles, y concluimos que  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ .  $\square$

Dos de los teoremas más importantes en la teoría de espacios productos son los de Tonelli y Fubini. Estos teoremas nos dejan computar integrales sobre  $X \times Y$  computando una integral sobre el espacio  $X$  y después otra sobre el espacio  $Y$  o vice versa. Para poder llegar a las demostraciones de estos teoremas necesitaremos un concepto nuevo y un par de resultados técnicos.

DEFINICIÓN 3.20. A una colección de subconjuntos  $\mathfrak{U}$  de un conjunto  $S$  le llamamos *clase monótona* si esta colección está cerrada bajo uniones numerables crecientes (si  $E_i \in \mathfrak{U}$  y  $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \cdots$ , entonces  $\cup E_i \in \mathfrak{U}$ ) e intersecciones numerables decrecientes (si  $E_i \in \mathfrak{U}$  y  $E_1 \supset E_2 \supset E_3, \cdots$ , entonces  $\cap E_i \in \mathfrak{U}$ ).

EJEMPLO 3.10. Sea  $S$  cualquier conjunto finito y  $\mathfrak{U} = \mathcal{P}(S) \setminus \{S, \emptyset\}$ .

EJEMPLO 3.11. Sea  $S = \mathbb{R}$  y  $\mathfrak{U} = \{a : a \in \mathbb{R}\} \cup$  la colección de intervalos.

Observamos que una  $\sigma$ -álgebra es una clase monótona y que la intersección de cualquier colección de clases monótonas es una clase monótona (Ejercicio 35). Entonces, si  $\mathfrak{U} \subset \mathcal{P}(S)$  es una colección cualquiera de subconjuntos de  $S$ , la intersección de todas las clases monótonas que contienen

a  $\mathfrak{A}$  es la clase monótona más pequeña que contiene a  $\mathfrak{A}$ . A ésta se le llama la *clase monótona generada por  $\mathfrak{A}$* .

LEMA 3.17. *Si  $\mathfrak{A}$  es una álgebra, entonces la clase monótona generada por  $\mathfrak{A}$  iguala a la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathfrak{A}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio. □

LEMA 3.18. *Se supone que  $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  y  $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$  son espacios de medida  $\sigma$ -finitos. Para todo  $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$  las funciones  $x \mapsto \nu(E_x)$  y  $y \mapsto \mu(E^y)$  son medibles en  $X$  y  $Y$  respectivamente. Se tiene que*

$$(\mu \times \nu)(E) = \int_{X \times Y} \chi_E d(\mu \times \nu) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y).$$

DEMOSTRACIÓN. Primero tratamos el caso cuando  $\mu$  y  $\nu$  son finitos. Si  $E = A \times B$  es un rectángulo medible, tenemos  $\mu(E^y) = \begin{cases} \mu(A) & y \in B \\ 0 & y \notin B \end{cases}$ ; es decir  $\mu(E^y) = \chi_B(y)\mu(A)$ . Similarmente  $\nu(E_x) = \chi_A(x)\nu(B)$ . Entonces el resultado es inmediato en este caso. La aditividad de la integral nos da que el resultado del lema es cierto en el caso de una unión finita de rectángulos medibles disjuntos.

Si podemos demostrar que la colección de conjuntos en  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$  que satisfacen el resultado del lema forman una clase monótona, el Lema 3.17 nos dará que esta colección iguala a todo  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$  y la demostración estará completa.

Sea  $E = \cup E_n$  donde  $\{E_n\} \subset \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$  es una colección creciente de conjuntos que satisfacen el resultado del lema. Las funciones  $f_n(x) = \nu((E_n)_x)$  son medibles, la sucesión es creciente y converge puntualmente a la función  $x \mapsto \nu(E_x)$ . O sea que esta función es medible. Utilizando el Teorema de Convergencia Monótona (Teorema 3.5) tenemos

$$\int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \lim \int_X \nu((E_n)_x) d\mu(x) = \lim (\mu \times \nu)(E_n) = (\mu \times \nu)(E).$$

Un argumento idéntico da que  $\int_Y \mu(E^y) d\nu(y) = (\mu \times \nu)(E)$ .

Dejamos como ejercicio el caso  $E \cap E_n$  donde la colección de conjuntos  $\{E_n\} \subset \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$  es decreciente.

Si  $\mu$  y  $\nu$  son  $\sigma$ -finitos,  $X \times Y = \cup(X_i \times Y_i)$  donde  $\{X_i \times Y_i\}$  es una colección de rectángulos crecientes de medida finita. Si  $E \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ ,  $(\mu \times \nu)$  restringida a  $E \cap (X_i \times Y_i)$  es finita y tenemos utilizando el caso finito

$$\begin{aligned} (\mu \times \nu)(E \cap (X_i \times Y_i)) &= \int_X \nu((E \cap (X_i \times Y_i))_x) d\mu(x) \\ &= \int_X \chi_{X_i}(x) \nu(E_x \cap Y_i) d\mu(x). \end{aligned}$$

La sucesión de funciones  $\{\chi_{X_i}(x)\nu(E_x \cap Y_i)\}$  es creciente y puntualmente converge a  $\nu(E_x)$ . Utilizamos el Teorema de Convergencia Monótona una vez más para concluir que  $(\mu \times \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x)$ . El argumento para  $\int_Y \mu(E^y) d\nu(y)$  es idéntico.  $\square$

Observamos que si  $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ ,  $\int_X \chi_E(x, y) d\mu(x) = \mu(E^y)$  y  $\int_Y \chi_E(x, y) d\nu(y) = \nu(E_x)$ , entonces el resultado del lema se puede expresar como

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} \chi_E(x, y) d(\mu \times \nu) &= \int_X \left[ \int_Y \chi_E(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x) \\ &= \int_Y \left[ \int_X \chi_E(x, y) d\mu(x) \right] d\nu(y). \end{aligned} \quad (3)$$

La linealidad de la integral nos da que la formula (3) con  $f$  en lugar de  $\chi_E$  si  $f = \sum a_i \chi_{E_i}$  es una función simple con coeficientes positivos. (Si  $(\mu \times \nu)(E_i) < \infty \forall i$ , el resultado es cierto sin la restricción que los coeficientes sean positivos.) El Teorema de Tonelli nos dice que el resultado es cierto para toda  $f$  no negativa.

**TEOREMA 3.13 (Tonelli).** Sean  $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  y  $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finitos. Si  $f : (X \times Y) \rightarrow [0, \infty]$  es  $\mu \times \nu$  integrable, las funciones  $\alpha(x) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  y  $\beta(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$  son integrables en  $X$  y  $Y$  respectivamente y se tiene

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu) &= \int_X \left[ \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x) \\ &= \int_Y \left[ \int_X f(x, y) d\mu(x) \right] d\nu(y). \end{aligned} \quad (4)$$

DEMOSTRACIÓN. Ya observamos que el resultado es cierto para funciones simples con coeficientes positivos. Sea  $f : (X \times Y) \rightarrow [0, \infty]$  una función integrable y  $\{\phi_n\}$  una sucesión de funciones simples crecientes que convergen puntualmente a  $f$  (como en la demostración del Teorema 3.6).

Las sucesiones de funciones  $\{\alpha_n(x) = \int_Y (\phi_n)_x(y) d\nu(y)\}$  y  $\{\beta_n(y) = \int_X (\phi_n)^y(x) d\mu(x)\}$  son crecientes, no negativas y convergen puntualmente a  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente. Entonces  $\alpha$  y  $\beta$  son medibles. Ocupando el Teorema de Convergencia Monótona tenemos

$$\begin{aligned} \int_X \left[ \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x) &= \int_X \alpha(x) d\mu(x) \\ &= \lim \int_X \alpha_n(x) d\mu(x) \\ &= \lim \int_{X \times Y} \phi_n(x, y) d(\mu \times \nu) \\ &= \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu). \end{aligned}$$

Similarmente para  $\int_Y \beta(y) d\nu(y)$ . □

Observamos que si  $f(x, y) \geq 0$  y  $\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu)$  es finito,  $\int_X f^y(x) d\mu(x)$  es finito para casi todo  $y \in Y$ , y  $\int_Y f_x(y) d\nu(y)$  es finito para casi todo  $x \in X$ . El siguiente teorema nos da la identidad (4) en el caso de funciones integrables (no necesariamente no negativas).

TEOREMA 3.14 (Fubini). Sean  $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  y  $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$  espacios de medida y sea  $f : (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable. Entonces

- (i)  $f_x(y) = f(x, y)$  es integrable para casi todo  $x \in X$  y  $f^y(x) = f(x, y)$  es integrable para casi todo  $y \in Y$ .
- (ii) La función  $x \mapsto \int_Y f_x(y) d\nu(y)$  es  $\mu$  integrable y la función  $y \mapsto \int_X f^y(x) d\mu(x)$  es  $\nu$  integrable.
- (iii) La identidad (4) es cierta

DEMOSTRACIÓN. El resultado es inmediato porque las partes positivas y negativas de  $f$  son integrables y ellas se pueden tratar con el teorema de Tonelli y la linealidad de la integral.  $\square$

En muchas aplicaciones los teoremas de Tonelli y Fubini se utilizan juntos. Si  $f : (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función y se quiere cambiar la orden de integración en  $\int_Y \left[ \int_X f(x, y) d\mu(x) \right] d\nu(y)$ , primero se verifica que  $|f(x, y)|$  es integrable con el cómputo de cualquiera de los integrales en la identidad (4). Después se utiliza en Teorema de Fubini para concluir que la integral iguala  $\int_X \left[ \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x)$ .

### Ejercicios

- 32.** Demuestre las observaciones que le siguen a la Definición 3.20.
- 33.** Demuestre que si  $\mu$  y  $\nu$  son  $\sigma$ -finitos,  $\mu \times \nu$  también lo es.
- 34. a.** De un ejemplo que demuestra que  $\mu$  y  $\nu$  pueden ser medidas completas pero  $\mu \times \nu$  no tiene que ser completo.  
**b.** De un hipótesis que garantiza que  $\mu \times \nu$  es completo.
- 35.** Demuestre que la intersección de cualquier colección de clases monótonas es una clase monótona.
- 36.** En este problema demostramos el Lema 3.17. Sea  $\mathfrak{A}$  una álgebra y  $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$  la clase monótona generada por  $\mathfrak{A}$ .  
**a.** ¿Por qué es suficiente demostrar que  $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$  es un álgebra?  
**b.** Demuestre que  $\{E \in \mathcal{M}(\mathfrak{A}) : E^c \in \mathcal{M}(\mathfrak{A})\}$  es una clase monótona que contiene a  $\mathfrak{A}$  y por lo tanto iguala a  $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$ .  
**c.** Para  $E \in \mathcal{M}(\mathfrak{A})$  definimos  $\Gamma_E = \{F \in \mathcal{M}(\mathfrak{A}) : E \cup F \in \mathcal{M}(\mathfrak{A})\}$ . Demuestre que  $\Gamma_E$  es una clase monótona que contiene a  $\mathfrak{A}$  y por lo tanto  $\Gamma_E = \mathcal{M}(\mathfrak{A})$ .  
**d.** Termine la demostración del Lema 3.17.
- 37.** De un ejemplo que demuestra que el hipótesis de  $\sigma$ -finito es necesario en el teorema de Tonelli.

**38.** Evalúe las siguientes integrales. En todas,  $m$  es la medida de Lebesgue.

a.  $\int_{[0,\infty) \times [0,\infty)} x e^{-(x^2+y^2)} d(m \times m).$

b.  $\int_{[0,\infty) \times \mathbb{R}} x e^{-(x^2+y^2)} d(m \times m).$

c.  $\int_1^\infty \left[ \int_1^\infty \frac{x}{(x^2+y^2)^2} dy \right] dx.$

**39.** Sea  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x, y) \neq 0; \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

a. Demuestre que

$$\int_0^1 \left[ \int_0^1 f(x, y) dy \right] dx \neq \int_0^1 \left[ \int_0^1 f(x, y) dx \right] dy.$$

b. ¿Qué podemos concluir sobre  $f$ ?

**40.** Sean  $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  y  $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita y  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $h : Y \rightarrow \mathbb{R}$  funciones integrables.

a. Demuestre que  $h(x, y) = g(x)h(y)$  es integrable.

b. ¿Cómo se puede computar  $\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu)$ ?

## Capítulo 4

### Los Espacios $L^p$

#### 4.1. Definiciones y Propiedades Básicas

En este capítulo tratamos espacios de funciones que juegan un papel importante en matemáticas, física y otras ciencias. Estos espacios también han motivado mucho del análisis matemático desarrollado en el siglo XX. Por ejemplo, las definiciones de estructuras básicas en el análisis funcional fueron creadas para acomodar a los espacios  $L^p$  dentro de una teoría más amplia.

Aunque muchas funciones dentro de ellos habían sido estudiadas por muchos siglos, el estudio organizado de estos espacios nació al principio del siglo XX porque la teoría de la medida es indispensable para su definición.

Sea  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  un espacio de medida y sea  $\mathcal{F}$  la colección de funciones medibles complejas definidas en  $X$ . O sea  $f \in \mathcal{F}$  significa  $f = f_r + if_i$  tal que  $f_r, f_i : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \pm\infty$  son funciones medibles como definidas en el último capítulo. Identificamos funciones  $f, g \in \mathcal{F}$  como iguales si  $f(x) = g(x)$  para casi todo  $x \in X$ . Es decir que las “funciones” que estudiaremos son en realidad clases de equivalencia de funciones medibles bajo la relación  $f \sim g$  si  $\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ .

Los elementos en los espacios  $L^p(\mu)$ ,  $1 \leq p < \infty$  serán funciones que satisfacen ciertas condiciones de crecimiento y las funciones en  $L^\infty(\mu)$  serán las funciones casi siempre acotadas.

DEFINICIÓN 4.1. Para  $1 \leq p < \infty$  el espacio

$$L^p(\mu) = \{f \in \mathcal{F} : \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$$

y  $L^\infty(\mu) = \{f \in \mathcal{F} : \exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \mu\{x \in X : |f(x)| > M\} = 0\}$ .

Observamos que los espacios están bien definidos porque si  $f, g \in \mathcal{F}$  y  $f \sim g$ , tenemos que  $f \in L^p(\mu)$  si y sólo si  $g \in L^p(\mu)$  para  $1 \leq p \leq \infty$ .

demostrar que  $L^\infty(\mu)$  es un espacio vectorial es fácil y lo dejamos como ejercicio. Para los otros casos observamos que  $f \in L^p(\mu)$  y  $c \in \mathbb{C}$  implica que  $cf \in L^p(\mu)$ . Si  $f, g \in \mathcal{F}$ ,

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leq (2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p = 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \\ &\leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p). \end{aligned}$$

Entonces  $f, g \in L^p(\mu)$  implica que  $f + g \in L^p(\mu)$ . El elemento cero en todos los espacios es la función que iguala cero para casi todo  $x \in X$ .

Cada espacio tiene mucha más estructura porque podemos asociar a cada elemento un tamaño. Es decir una norma que se comporta como el valor absoluto. Veremos que el caso  $p = \infty$  lo tendremos que tratar por separado.

**DEFINICIÓN 4.2.** Fijamos  $1 \leq p < \infty$ . Si  $f \in L^p(\mu)$ , definimos la *norma* de  $f$  por

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Si  $f \in L^\infty(\mu)$ ,  $\|f\|_\infty = \inf\{M : \mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0\}$ .<sup>1</sup>

Dejamos como ejercicio demostrar que para cada  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\|f\|_p = 0$  si y sólo si  $f(x) = 0$  para casi todo  $x \in X$ . Entonces si  $f \neq g$ ,  $\|f - g\|_p \neq 0$ . Si  $c \in \mathbb{C}$ ,  $\|cf\|_p = |c|\|f\|_p$ . Para concluir que  $\|\cdot\|_p$  se comporta como el valor absoluto falta demostrar la desigualdad del triángulo:  $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ . Cuando  $p \neq \infty$ , esta no es tan inmediata. Necesitaremos establecer una relación entre funciones en diferentes espacios. Específicamente veremos que si  $p, q \in [1, \infty]$  satisfacen  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , los espacios  $L^p(\mu)$  y  $L^q(\mu)$  tienen conexiones fundamentales. Para el caso  $p > 1$  haremos uso del siguiente resultado de cálculo.

**LEMA 4.1.** Si  $p > 1, a, b > 0$  y  $q$  satisfacen  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , entonces  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ , con igualdad si y sólo si  $a^p = b^q$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Formamos la función  $k(x) = x^{p-1}$  y su función inversa  $l(y) = y^{1/p-1}$ . La cantidad  $ab$  se puede interpretar como el área del rectángulo con vértices  $(0, 0), (0, a), (a, b)$ , y  $(0, b)$ . Esta área se puede acotar con  $\int_0^a k(x) dx + \int_0^b l(y) dy$ . Le referimos a la Figura 1. O sea

<sup>1</sup>Este número se puede entender como la cantidad más pequeña que cota a  $f$  para casi todo  $x \in X$ .

$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p-1}+1}{\frac{1}{p-1}+1} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ . Las dos cantidades serán iguales si y sólo si el área del rectángulo es igual a la suma de las dos integrales. Esto sucede si y sólo si  $k(a) = b$ . Es decir cuando  $a = b^{1/p-1} \Rightarrow a^p = b^{\frac{p}{p-1}} = b^q$ .  $\square$

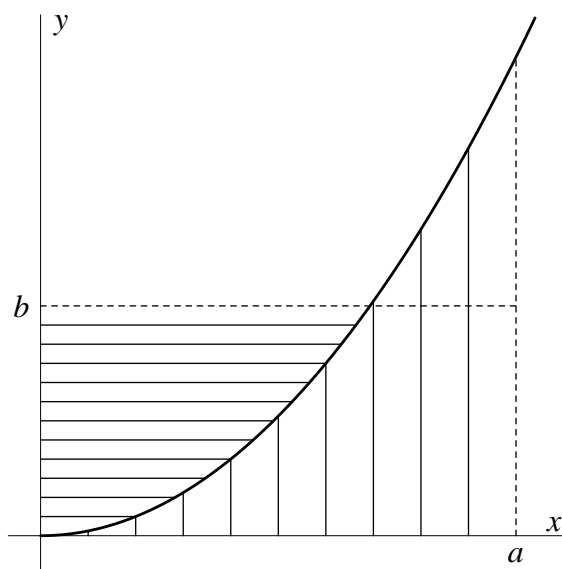


FIGURA 1. Gráfica de  $k(x)$  y  $l(y)$  (son iguales) en el caso  $p = 2$ .

**TEOREMA 4.1** (Desigualdad de Hölder). *Sea  $p, q \geq 1$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Si  $f \in L^p(\mu)$  y  $g \in L^q(\mu)$ , tenemos que  $fg \in L^1(\mu)$  y  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $f$  o  $g$  iguala 0, no hay nada que demostrar.

Cuando  $p > 1$  y  $\|f\|_p, \|g\|_q \neq 0$ , Utilizamos el lema con  $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$  y  $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$  para obtener

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Esta desigualdad da inmediatamente que  $fg \in L^1(\mu)$ . Integrando sobre  $X$  y despues multiplicando por  $\|f\|_p \|g\|_q$  obtenemos la desigualdad del teorema.

Si  $f \in L^1(\mu)$  y  $g \in L^\infty(\mu)$ , fijamos  $\varepsilon > 0$ . Sea  $E = \{x \in X : |g(x)| > \|g\|_\infty + \varepsilon\}$ . La definición de  $\|\cdot\|_\infty$  implica que  $\mu(E) = 0$  y para computar  $\|\cdot\|_1$  es suficiente integrar sobre  $E^c$ . Como  $|g(x)| \leq \|g\|_\infty + \varepsilon$  cuando  $x \in E^c$ ,

tenemos que  $\int_{E^c} |fg| d\mu \leq \int_{E^c} |f|(\|g\|_\infty + \varepsilon) d\mu = \|f\|_1(\|g\|_\infty + \varepsilon)$ . Como  $\varepsilon$  es arbitrario concluimos que  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ .  $\square$

**TEOREMA 4.2** (Desigualdad de Minkowski). *Si  $1 \leq p \leq \infty$  y  $f, g \in L^p(\mu)$ , tenemos  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** El caso  $p = 1$  lo obtenemos utilizando la desigualdad del triángulo para números reales y la primera parte de la Proposición 3.9. El caso  $p = \infty$  lo dejamos como ejercicio.

Si  $p > 1$ , definimos  $q = \frac{p}{p-1}$  para poder utilizar la desigualdad de Hölder. Es obvio que

$$|f(x) + g(x)|^p \leq |f(x) + g(x)|^{p-1}|f(x)| + |f(x) + g(x)|^{p-1}|g(x)| \quad (1)$$

y que  $|f(x) + g(x)|^{p-1} \in L^q(\mu)$ . La desigualdad de Hölder nos da que  $(f + g)^{p-1} f, (f + g)^{p-1} g \in L^1(\mu)$ . Integrando (1) y utilizando la misma da

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &\leq \|(f + g)^{p-1}\|_q \|f\|_p + \|(f + g)^{p-1}\|_q \|g\|_p \\ &= \left( \int_X |f + g|^{p-1} d\mu \right)^{1/q} (\|f\|_p + \|g\|_p) \\ &= \|f + g\|_p^{\frac{p}{p-1}} (\|f\|_p + \|g\|_p). \end{aligned}$$

Dividiendo la desigualdad por  $\|f + g\|_p^{\frac{p}{p-1}}$  y recordando que  $p - \frac{p}{p-1} = 1$ , obtenemos el resultado.  $\square$

**EJEMPLO 4.1.** Sea  $X = \mathbb{N}$  y  $\mu(n) = 1 \forall n \in \mathbb{N}$ . En este caso los espacios  $L^p(\mu)$  son espacios de sucesiones en  $\mathbb{C}$  y la integral se convierte en suma infinita. Estos espacios se escriben  $l^p(\mathbb{N})$ . Es decir  $l^\infty(\mathbb{N})$  es el espacio de sucesiones acotadas con  $\|\{x_n\}\|_\infty = \sup\{|x_n|\}$ ; y  $l^p(\mathbb{N}) = \left\{ \{x_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$  con  $\|\{x_n\}\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ . Por ejemplo, la sucesión  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$  pertenece a todos los  $l^p(\mathbb{N})$  para  $p > 1$  pero no a  $l^1(\mathbb{N})$ .

Como espacio vectorial con una función que se comporta como valor absoluto,  $L^p(\mu)$  tiene una manera fundamental de medir distancia entre sus elementos y podemos definir la noción de convergencia.

DEFINICIÓN 4.3. Decimos que la sucesión  $\{f_n\} \in L^p(\mu)$  converge a  $f \in L^p(\mu)$  y escribimos  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$ .

EJEMPLO 4.2. Sea  $X = [0, 1]$  y  $\mu$  la medida de Lebesgue. Definimos  $f_n(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ 0 & x > \frac{1}{n}. \end{cases}$  La sucesión  $\{f_n\}$  está en cada  $L^p([0, 1])$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$  cuando  $p \neq \infty$ , pero  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \neq 0$  en  $L^\infty([0, 1])$  porque  $\|f_n\|_\infty = 1 \forall n$ .

EJEMPLO 4.3. Sea  $X = \mathbb{R}$  y  $\mu$  la medida de Lebesgue. Definimos  $f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [n, n+1]; \\ 0 & x \notin [n, n+1]. \end{cases}$  Para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , pero  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \neq 0$  en ningún  $L^p(\mathbb{R})$  porque  $\|f_n\|_p = 1$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$ . Igual que sucede con sucesiones de números, si la sucesión  $\{f_n\} \in L^p(\mu)$  converge, para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall m, n > N$ ,  $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ . En este caso  $\|f_n - f_m\|_p = \begin{cases} 2 & 1 \leq p < \infty; \\ 1 & p = \infty. \end{cases}$  Entonces la sucesión no converge en ninguno de los espacios  $L^p(\mu)$ .

EJEMPLO 4.4. En  $l^p(\mathbb{N})$  las sucesiones son sucesiones de sucesiones de números complejos. Por ejemplo, la sucesión  $f_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$ ,  $f_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$ ,  $f_3 = (0, 0, 1, 0, \dots)$ ,  $\dots$  está en cada  $l^p(\mathbb{N})$  pero no converge en ninguno de los espacios.

## Ejercicios

1. Sean  $f, g \in L^\infty(\mu)$  y  $c \in \mathbb{C}$ .
  - a. Demuestre que  $f + cg \in L^\infty(\mu)$ .
  - b. Demuestre que  $\|cf\|_\infty = |c|\|f\|_\infty$  y que  $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ .
  - c. Demuestre que  $\mu(\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\}) = 0$ .
  - d. Suponemos que existe un subconjunto medible  $X' \subset X$  tal que  $\mu(X/X') = 0$ . Demuestre que si  $|f(x)| < \varepsilon \forall x \in X'$ , entonces  $\|f\|_\infty < \varepsilon$ .

**2.** Demuestre que  $f(x) = 0$  para casi todo  $x \in X$  si y sólo si  $\|f\|_p = 0$  para cada  $1 \leq p \leq \infty$ .

**3.** Se supone que  $\mu(X) < \infty$ .

**a.** Demuestre que si  $1 \leq p < p' \leq \infty$  existe un constante  $C$  tal que para toda  $f \in L^{p'}(X)$ ,  $\|f\|_p \leq C\|f\|_{p'}$ .

**b.** ¿Qué nos dice este resultado sobre la relación entre  $L^p(\mu)$  y  $L^{p'}(X)$ ?

**4.** Demuestre que si  $1 \leq p < p' \leq \infty$ ,  $l^p(\mathbb{N}) \subset l^{p'}(\mathbb{N})$ .

**5.** Demuestre que si  $f \in L^\infty(\mu) \cap L^p(\mu)$  entonces  $f \in L^{p'}(X)$  para todo  $p' > p$ .

**6.** Sea  $1 \leq p \neq p' \leq \infty$ . Demuestre que existe  $f \in L^p(\mathbb{R})$  tal que  $f \notin L^{p'}(\mathbb{R})$ .

**7.** ¿Qué dice la desigualdad de Hölder para las sucesiones  $\{x_n\}, \{y_n\} \in l^2(\mathbb{N})$ ?

**8.** Se supone que la sucesión  $\{f_n\} \in L^p(\mu)$  converge. Demuestre que para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall m, n > N$ ,  $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ .

**9.** Encuentre los siguientes ejemplos.

**a.** Una sucesión de funciones  $\{f_n\} \in L^p(\mathbb{R})$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\infty = 0$  y tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  no existe en ningún otro espacio  $L^p(\mathbb{R})$ .

**b.** Una sucesión de funciones  $\{f_n\}$  en  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = 0$  pero  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_1 \neq 0$ .

**c.** Una sucesión de funciones  $\{f_n\}$  en  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_1 = 0$  pero  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 \neq 0$ .

**10.** Se supone que  $\mu(X) < \infty$  y que  $\{f_n\} \in L^\infty(\mu)$  es una sucesión que converge a 0 en  $L^\infty(\mu)$ . Demuestre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p = 0$  para todo  $p \geq 1$ .

**11.** En el espacio  $X = [0, 1]$ , encuentre una sucesión de funciones escalonadas  $\{\phi_n\}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n\|_p = 0$  para todo  $1 \leq p < \infty$  pero  $\|\phi_n\|_\infty = 1$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x) \neq 0$  para ningún  $x \in [0, 1]$ .

**12.** Sea  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  un espacio de medida y  $1 \leq p, q \leq \infty$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

- a. Si  $p = 1, q = \infty$  y  $g \in L^1(\mu)$ , encuentre una función  $f \in L^\infty(\mu)$  tal que  $\int_X fg d\mu = \|g\|_1$ .
- b. Si  $1 < p < \infty$  y  $g \in L^p(\mu)$ , encuentre una función  $f \in L^q(\mu)$  tal que  $\int_X fg d\mu = \|g\|_p$ .
- c. Fijamos  $\varepsilon > 0$  y  $g \in L^\infty(\mu)$ . Encuentre una función  $f \in L^1(\mu)$  tal que  $\int_X fg d\mu \geq (\|g\|_\infty - \varepsilon)\|f\|_1$ .

**13.** Este ejercicio se dedica a la demostración que la desigualdad del triángulo no es cierta si  $0 < p < 1$ . Fijamos un espacio de medida  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  y  $0 < p < 1$ .

- a. Si  $a, b > 0$ , demuestre que  $a^p + b^p > (a + b)^p$ .
- b. Escojemos  $E, F \in \mathfrak{B}$  de medida positiva tal que  $E \cap F = \emptyset$ . Demuestre que

$$\left| \int_X \chi_E^p d\mu \right|^{\frac{1}{p}} + \left| \int_X \chi_F^p d\mu \right|^{\frac{1}{p}} < \left| \int_X (\chi_E + \chi_F)^p d\mu \right|^{\frac{1}{p}}.$$

(Utilize  $a = \mu(E)^{\frac{1}{p}}$  y  $b = \mu(F)^{\frac{1}{p}}$  en la parte a.)

**14.** Este ejercicio establece una cierta conversa a desigualdad de Hölder. Sea  $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  un espacio de medida  $\sigma$ -finito,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  con  $p \neq \infty$ , y  $S$  la colección de funciones simples que igualan cero fuera de un conjunto de medida finita. Suponemos que  $g$  es una función medible tal que  $fg \in L^1 \forall f \in S$ . El resultado es que  $g \in L^q$  y  $\|g\|_q = \sup \left\{ \left| \int_X fg d\mu \right| : f \in S \text{ y } \|f\|_p = 1 \right\}$ . La demostración la realizaremos en tres partes.

- a. Sea  $\{E_j\}$  una sucesión creciente de conjuntos medibles de medida finita tal que  $X = \cup E_j$  y  $\{\phi_j\}$  una sucesión de funciones simples tal que  $\phi_j \rightarrow g$  y  $|\phi_j| \leq |g|$ . Defina una sucesión  $\{g_j\} \subset S$  tal que  $g_j \rightarrow g$  puntualmente y  $|g_j| \leq |g|$ .
- b. Defina  $f_j = \|g_j\|_q^{1-q} |g_j|^{q-1} \overline{\text{sgn } g}$ . Demuestre que  $\|f_j\|_p = 1$ .
- c. Utilize el Lema de Fatou para establecer que

$$\|g\|_q \leq \sup \left\{ \left| \int_X fg d\mu \right| : f \in S \text{ y } \|f\|_p = 1 \right\}.$$

Esto termina la demostración porque la desigualdad de Hölder nos da la otra desigualdad.

## 4.2. Estructuras Básicas del Análisis Funcional

Las ideas fundamentales de la rama de matemáticas que ahora se conoce como análisis funcional les dio forma organizada al principio del siglo pasado el polaco Stefan Banach. Veremos que espacios concretos como  $\mathbb{C}^n$  y los espacios  $L^p(\mu)$  son ejemplos de estructuras más generales.

**DEFINICIÓN 4.4.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ . Una *norma* en  $V$  es una función  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  tal que

- i.  $\|f\| = 0$  si y sólo si  $f = 0$ ;
- ii.  $\|cf\| = |c|\|f\|$  para todo  $f \in V$  y  $c \in \mathbb{C}$ ;
- iii.  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$  para todo  $f, g \in V$ .

Al espacio con tal estructura se llama *espacio vectorial normado* o *espacio lineal normado*.

**EJEMPLO 4.5.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{C}^n$  es un espacio vectorial normado con la norma euclidiana:  $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$ .

**EJEMPLO 4.6.** Cualquiera de los espacios  $L^p(\mu)$  es un espacio vectorial normado.

La norma nos da una manera de medir distancia entre elementos: si  $f, g \in V$ , la *distancia* entre  $f$  y  $g$  es  $d(f, g) = \|f - g\|$ . Es fácil ver que la desigualdad del triángulo nos da la desigualdad del triángulo en términos de esta función de distancia. O sea que  $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$  para todo  $f, g, h \in V$ . Entonces tenemos los conceptos fundamentales de espacios métricos. Por ejemplo, a un subconjunto  $S \subset V$  le llamamos *denso* si para cada  $\varepsilon > 0$  y  $v \in V$  existe  $s \in S$  tal que  $\|v - s\| < \varepsilon$ . Las definiciones de convergencia en la sección previa están de acuerdo con la siguiente definición donde también definimos otros conceptos fundamentales.

**DEFINICIÓN 4.5.** Sea  $V$  un espacio vectorial normado. Decimos que la sucesión  $\{f_n\}$  *converge a* o *tiene límite*  $f \in V$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ . A la sucesión se le llama *Cauchy* si para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $m, n \geq N$ ,  $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ . Se dice que el espacio está *completo* o que es un *espacio de Banach* si toda sucesión Cauchy tiene límite en  $V$ .

**EJEMPLO 4.7.** El hecho que sucesiones Cauchy convergen en  $\mathbb{C}$  nos dice que  $\mathbb{C}^n$  es un espacio de Banach para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

EJEMPLO 4.8. El espacio de funciones continuas en un intervalo cerrado  $V = C[a, b]$  con norma  $\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$  es un espacio de Banach. La demostración la dejamos como ejercicio.

Recordamos que uno de los teoremas de cálculo nos dice que una serie de números complejos que converge absolutamente converge. O sea si  $\{x_n\} \subset \mathbb{C}$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |x_k|$  existe entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k$  existe. Lo fundamental en la demostración de este teorema es que las sumas parciales  $\sum_{k=1}^n x_k$  son una sucesión Cauchy y como  $\mathbb{C}$  está completo, la sucesión converge. La inversa de este teorema también es cierto no solo en  $\mathbb{C}$  pero también en espacios vectoriales normados. Este resultado será útil en la próxima sección para demostrar que los espacios  $L^p(\mu)$  son espacios de Banach.

TEOREMA 4.3. *Un espacio vectorial normado  $V$  está completo (o sea es espacio de Banach) si y sólo si la convergencia de  $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|$  implica la convergencia de  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ .*

DEMOSTRACIÓN. ( $\Rightarrow$ ) Si  $\{f_k\} \subset V$  es una sucesión tal que  $\sum \|f_k\|$  converge entonces la sucesión de sumas parciales  $\sum_{k=1}^n \|f_k\|$  es Cauchy y para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N$  tal que para  $n > m \geq N$ ,

$$\left| \sum_{k=1}^n \|f_k\| - \sum_{k=1}^m \|f_k\| = \sum_{k=m+1}^n \|f_k\| \right| < \varepsilon.$$

Utilizando la desigualdad del triángulo vemos que la sucesión de sumas parciales  $\sum_{k=1}^n f_k$  también es Cauchy porque para  $n > m \geq N$ ,

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k - \sum_{k=1}^m f_k = \sum_{k=m+1}^n f_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|f_k\| < \varepsilon.$$

Como la sucesión de sumas parciales es Cauchy, la serie  $\sum f_k$  converge porque  $V$  está completo.

( $\Leftrightarrow$ ) Sea  $\{f_k\}$  una sucesión Cauchy en  $V$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $K_n$  tal que  $\|f_k - f_l\| < \frac{1}{n^2}$  para todo  $k, l \geq K_n$ . Nos aseguramos que las  $K_n$  son crecientes y utilizando la subsucesión  $\{f_{K_n}\}$  definimos la sucesión  $g_1 = f_{K_1}, g_2 = f_{K_2} - f_{K_1}, \dots, g_n = f_{K_n} - f_{K_{n-1}}$ . Tenemos que  $\|g_n\| < \frac{1}{n^2}$  para  $n \geq 2$  y  $\sum \|g_n\|$  converge. El hipótesis nos dice que  $\sum g_n$  converge a un elemento  $f \in V$ . Las sumas parciales de  $\sum g_n$  son  $s_m = \sum_{n=1}^m g_n = f_{K_m}$ . O sea que la subsucesión  $\{f_{K_m}\}$  converge a un elemento  $f \in V$ . El ejercicio 15b nos dice que la sucesión entera  $\{f_n\}$  converge a  $f$ .  $\square$

Comentamos que este último resultado depende de la estructura algebraica del espacio y la relación entre esta y la norma. Por ejemplo, no existe un resultado similar en espacios métricos donde no hay estructura algebraica.

Hay espacios vectoriales normados cuyas normas nacen de otra estructura algebraica. La siguiente definición se motiva por el producto interno clásico en el espacio  $\mathbb{C}^n$ .

**DEFINICIÓN 4.6.** Sea  $V$  un espacio vectorial complejo. Un *producto interno* en  $V$  es una función  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  tal que para todo  $x, y, z \in V$

- (1)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  con igualdad si y sólo si  $x = 0$ ;
- (2)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ;
- (3)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ;
- (4)  $\langle cx, y \rangle = c \langle x, y \rangle$  para todo  $c \in \mathbb{C}$ .

**EJEMPLO 4.9.** En el espacio  $L^2(X)$  la desigualdad de Hölder nos deja definir para  $f, g \in L^2$

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g}.$$

Dejamos como ejercicio la demostración que este es un producto interno.

La primera condición en la definición del producto interno sugiere que en un espacio vectorial con producto interno hay una manera natural para definir una norma. Para verificar esto necesitaremos el siguiente resultado.

**TEOREMA 4.4 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz).** *Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Para todo  $x, y \in V$  tenemos*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Tratamos la demostración y varias otras propiedades del producto interno en el ejercicio 20. Observamos que utilizando el producto interno de  $L^2$ , esta desigualdad es un caso especial de la desigualdad de Hölder.

**TEOREMA 4.5.** *Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . La definición  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  nos da un espacio vectorial normado.*

**DEMOSTRACIÓN.** La única propiedad que no es obvia es la desigualdad del triángulo. Si  $x, y \in V$ , utilizando el ejercicio 20 y la desigualdad Cauchy-Schwarz (que se puede escribir  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ ), tenemos

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}\{\langle x, y \rangle\} + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2.$$

□

Quizás la diferencia más grande entre un espacio vectorial con producto interno y uno normado es que el producto interno le da al espacio una geometría.

**DEFINICIÓN 4.7.** Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno. Decimos que  $x, y \in V$  son *ortogonales* si  $\langle x, y \rangle = 0$ .

El siguiente teorema es fundamental y su demostración es inmediata.

**TEOREMA 4.6** (Teorema de Pitágoras). *Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  elementos en un espacio vectorial con producto interno tal que  $\langle x_j, x_k \rangle = 0$ ,  $j \neq k$ . Tenemos que*

$$\left\| \sum_{j=1}^n x_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2.$$

**EJEMPLO 4.10.** Regresando al caso de  $L^2(X)$ , vemos que  $f, g \in L^2(X)$  son ortogonales cuando  $\int_X f \bar{g} = 0$ . Por ejemplo, si consideramos  $f(x) = \sin 2\pi x$  y  $g(x) = \cos 2\pi x$  en  $L^2([0, 1])$ , entonces estas funciones son ortogonales. También, en cualquier  $L^2(X)$  si  $E_1, E_2$  son conjuntos medibles disjuntos, entonces  $\chi_{E_1}, \chi_{E_2}$  son ortogonales.

Un espacio vectorial con producto interno tiene mucha más estructura geométrica que normalmente se estudia en una clase de álgebra lineal. En el análisis funcional estudiamos los espacios que están completos.

DEFINICIÓN 4.8. Un espacio vectorial con producto interno que está completo utilizando la norma que se define por el producto interno se llama un *espacio de Hilbert*.

O sea que un espacio de Hilbert es un espacio de Banach donde la norma viene del producto interno. Como ya hemos previsto, en la próxima sección veremos que los espacios  $L^2(X)$  son espacios de Hilbert.

El análisis funcional no solo consiste en el estudio de las estructuras que hemos definido en esta sección sino también en el estudio de las funciones lineales entre estos espacios. De interés especial es la colección de funciones lineales continuas del espacio vectorial a  $\mathbb{C}$ .

DEFINICIÓN 4.9. Sea  $V$  un espacio vectorial normado. El *espacio dual* a  $V$ , escrito  $V^*$  es la colección de funciones lineales  $L : V \rightarrow \mathbb{C}$  tal que existe un  $M > 0$  con la propiedad que  $|L(v)| \leq M\|v\|, \forall v \in V$ .

OBSERVACIONES. Es fácil demostrar las siguientes afirmaciones.

- (1) El espacio  $V^*$  es un espacio vectorial.
- (2) La definición  $\|L\| = \sup \left\{ \frac{|L(v)|}{\|v\|} : v \in V, v \neq 0 \right\}$  convierte a  $V^*$  en un espacio vectorial normado.<sup>2</sup>
- (3) Para cualquier  $L \in V^*$  y sucesión  $\{v_n\} \subset V$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$ , tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} L(v_n) = L(v)$ . O sea que  $L$  es una función continua. Esto nos da que si  $S \subset V$  es un subconjunto denso y  $L(s) = 0 \forall s \in S$ , entonces  $L(v) = 0 \forall v \in V$ .
- (4) Si  $V$  es un espacio vectorial con producto interno y fijamos  $w \in V$ , la formula  $L(v) = \langle v, w \rangle$  define un elemento en  $V^*$  y  $\|L\| = \|w\|$ .

EJEMPLO 4.11. Sea  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  un espacio de medida y  $1 \leq p, q \leq \infty$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Fijamos  $g \in L^q(X)$  y para  $f \in L^p(\mu)$  definimos

$$L_g(f) = \int_X fg d\mu.$$

Está claro que  $L_g$  es una función lineal y la desigualdad de Hölder nos da que  $L_g \in L^p(\mu)^*$  y  $\|L_g\| \leq \|g\|_q$ . El ejercicio 12 se dedica a la demostración que  $\|L_g\| = \|g\|_q$ .

<sup>2</sup>Utilizamos la misma notación para la norma en  $V$  y la norma en  $V^*$ .

**Ejercicios**

- 15.** Sea  $V$  un espacio vectorial normado y  $\{f_n\}$  una sucesión.
- Demuestre que si  $\{f_n\}$  es convergente también es Cauchy.
  - Demuestre que si  $\{f_n\}$  es Cauchy y tiene una subsucesión que converge entonces la sucesión entera converge al mismo límite.

**16.** Sea  $C[a, b]$  el espacio de funciones continuas en el intervalo  $[a, b]$  con norma  $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$ . En este problema demostramos que  $C[a, b]$  es un espacio de Banach. Sea  $\{f_n\} \subset C[a, b]$  una sucesión Cauchy. Como para cada  $x \in [a, b]$  la sucesión de números complejos  $\{f_n(x)\}$  es Cauchy, existe una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .

- Demuestre que  $f$  es continua.
- Demuestre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ .

**17.** Sea  $V$  el espacio de sucesiones complejas que convergen a 0. O sea  $f \in V$  significa que  $f = (x_1, x_2, x_3, \dots)$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

- Demuestre que  $V$  es un espacio vectorial.
- Demuestre directamente que  $\|f\| = \|\{x_n\}\| = \max\{|x_n|\}$  es una norma en  $V$ . (En  $V$  esta norma es nada más que la norma de  $l^\infty(\mathbb{N})$ .)
- Demuestre que con esta norma  $V$  es un espacio de Banach.

- 18.** Sea  $V$  un espacio de Banach y  $\{x_n\}, \{y_n\}$  sucesiones en  $V$ .
- Demuestre que si  $\sum \|y_n\|$  converge y existe  $N$  tal que  $\|x_n\| \leq \|y_n\|$  para  $n \geq N$ , entonces  $\sum x_n$  converge.
  - Demuestre que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|}$  existe y es  $< 1$ , entonces  $\sum x_n$  converge.
  - De un ejemplo que demuestra que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$  y  $\|x_{n+1}\| > \|x_n\|, \forall n$  no implica la convergencia de  $\sum (-1)^n x_n$ .

**19.** Demuestre que en  $L^2(X)$ ,  $\int_X f \bar{g}$  define un producto interno.

**20.** Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno y  $x, y \in V$ .

- Demuestre que para todo  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\langle x \pm ay, x \pm ay \rangle = \langle x, x \rangle \pm 2a \operatorname{Re}\{\langle x, y \rangle\} + a^2 \langle y, y \rangle.$$

- ¿Cuáles son las identidades cuando  $a \in \mathbb{C}$ ?
- Demuestre que  $\langle cx, cx \rangle = |c|^2 \langle x, x \rangle$  para todo  $c \in \mathbb{C}$ .

**d.** Recordamos que para cada  $c \in \mathbb{C}$ ,  $c \neq 0$  existe una cantidad  $\text{sgn}(c)$  tal que  $|\text{sgn}(c)| = 1$  y  $c \cdot \text{sgn}(c) = |c|$ . Demuestre que  $\text{sgn}(\bar{c}) = \overline{\text{sgn}(c)}$ .

**e.** Demuestre que si  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\langle x - t \text{sgn}(\langle x, y \rangle)y, x - t \text{sgn}(\langle x, y \rangle)y \rangle = \quad (2)$$

$$\langle x, x \rangle - 2t |\langle x, y \rangle| + t^2 \langle y, y \rangle. \quad (3)$$

**f.** Esta última cantidad es una función cuadrática en  $t$  y es  $\geq 0$ . Demuestre la desigualdad Cauchy-Schwarz.

**g.** Recuerde que la expresión (3) iguala cero si y sólo si  $x - t \text{sgn}(\langle x, y \rangle)y = 0$ . Demuestre que la desigualdad de Cauchy-Schwarz es identidad si y sólo si  $x = cy$ ,  $c \in \mathbb{C}$ .

**21.** La desigualdad Cauchy-Schwarz nos dice que el producto interno es continuo en ambos componentes. Demuestre que si  $\{x_n\}, \{y_n\}$  son sucesiones en  $V$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle$ . (Utilize  $\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle = \langle x_n - x, y_n \rangle + \langle x, y_n - y \rangle$ .)

**22.** Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno y  $x, y \in V$ .

**a.** Demuestre el teorema de Pitágoras.

**b.** Demuestre la identidad del paralelogramo:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

**c.** Demuestre la identidad de polarización:

$$4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2.$$

**d.** Demuestre que una colección de elementos ortogonales son linealmente independientes.

**23.** Demuestre que la identidad del paralelogramo no es cierta en  $l^\infty(\mathbb{N})$  ni en  $C[a, b]$ . ¿Qué podemos concluir sobre estos espacios?

**24.** Demuestre que en  $L^2([0, 1])$  las funciones  $\{e^{2\pi inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  satisfacen

$$\langle e^{2\pi inx}, e^{2\pi mx} \rangle = \begin{cases} 0 & m \neq n; \\ 1 & m = n. \end{cases}$$

¿Qué nos dice este resultado sobre la dimensión de  $L^2([0, 1])$ ?

**25.** Demuestre las observaciones sobre la definición 4.9.

### 4.3. Los Espacios $L^p$ son Espacios de Banach

El teorema de Riesz-Fischer nos dice que cada  $L^p(\mu)$  es un espacio completo.

**TEOREMA 4.7.** *Para cada  $1 \leq p \leq \infty$ , una sucesión de funciones  $\{f_n\} \subset L^p(\mu)$  es Cauchy si y sólo si existe una función  $f \in L^p(\mu)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Primero tratamos el caso  $1 \leq p < \infty$ . Utilizamos el Teorema 4.3. Sea  $\{f_n\} \subset L^p(\mu)$  una sucesión tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p = M < \infty$ .

Definimos  $h_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_k(x)|$ . La desigualdad del triángulo nos da que  $\|h_n\|_p \leq M$ . O sea que  $\int h_n^p \leq M^p$ . Para cada  $x \in X$ ,  $\{h_n(x)\}$  es una sucesión creciente y por lo tanto podemos definir  $h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) \in [0, \infty]$ . El lema de Fatou nos da que  $\int h^p \leq M^p$  y podemos concluir que  $\mu(\{x : h(x) = \infty\}) = 0$ . Para cada  $x \in X$  donde  $h(x)$  es finita, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |h_n(x)|$  converge y por lo tanto  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge. Definimos  $f(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) & h(x) < \infty; \\ 0 & h(x) = \infty. \end{cases}$  Es evidente que  $f$  es medible porque es el límite de una sucesión de funciones medibles para casi todo  $x$ . También  $|f(x)| \leq h(x)$  porque  $\sum_{k=1}^n |f_k(x)| \leq h(x)$ . Entonces  $|f|^p \leq h^p$  y tenemos que  $f \in L^p(\mu)$ . Finalmente  $|\sum_{k=1}^n f_k(x) - f(x)|^p \leq (2h(x))^p = 2^p h^p(x)$ . La función  $2^p h^p$  es integrable y  $|\sum_{k=1}^n f_k(x) - f(x)|^p$  converge a 0 para casi todo  $x \in X$ . El teorema de convergencia dominada de Lebesgue (Teorema 3.8) da que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) - f(x) \right|^p d\mu = 0.$$

O sea que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  converge a  $f$  en  $L^p(\mu)$ .

Ahora tratamos el caso  $p = \infty$ . Si  $\{f_n\}$  es una sucesión Cauchy en  $L^\infty(\mu)$ , el ejercicio 1c nos dice que  $\mu(\{x : |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}) = \mu(\{x : |f_k(x) - f_l(x)| > \|f_k - f_l\|_\infty\}) = 0$  para todo  $k, l \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto existe un subconjunto medible  $X' \subset X$  tal que si  $x \in X'$ ,  $|f_k(x)| \leq \|f_k\|_\infty$  y  $|f_k(x) - f_l(x)| \leq \|f_k - f_l\|_\infty$ . En particular la sucesión de números  $\{f_k(x)\}$  es Cauchy para todo  $x \in X'$  y por lo tanto converge. Definimos

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) & x \in X'; \\ 0 & x \notin X'. \end{cases}$$

Es evidente que  $f$  es medible y como la sucesión  $\{\|f_k\|_\infty\}$  está acotada (por que es Cauchy),  $f \in L^\infty(\mu)$ . Fijamos  $\varepsilon > 0$ . Existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $k, l \geq N$  implica que  $\|f_k - f_l\|_\infty < \varepsilon$  y por lo tanto para todo  $x \in X'$ ,  $|f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon$ . Si fijamos  $x \in X'$ , existe un  $N' > N$  tal que  $|f_{N'}(x) - f(x)| < \varepsilon$ . Tenemos  $|f(x) - f_k(x)| \leq |f(x) - f_{N'}(x)| + |f_{N'}(x) - f_k(x)| \leq 2\varepsilon$  para todo  $k > N$  donde  $N$  es independiente de  $x$ . O sea que  $\{f_k\}$  converge a  $f$  uniformemente en  $X'$ . Utilizamos el ejercicio 1d para concluir que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_\infty = 0$ .  $\square$

**COROLARIO 4.2.** *El espacio  $L^2(X)$  es un espacio de Hilbert.*

Un concepto importante en el análisis es poder aproximar un elemento cualquiera utilizando una colección de elementos cuya estructura la conocemos bien.

**DEFINICIÓN 4.10.** Sea  $V$  un espacio vectorial normado y  $S$  un subconjunto de  $V$ . Se dice que  $S$  es *denso* en  $V$  si para cada  $x \in V$ , existe una sucesión  $\{s_n\} \subset S$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - s_n\| = 0$ .

**PROPOSICIÓN 4.3.** *La colección de funciones simples  $s = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$  tal que  $\mu(E_j) < \infty$ ,  $\forall j$  es densa en  $L^p(\mu)$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** El caso  $p = \infty$  lo dejamos como ejercicio. Fijamos  $1 \leq p < \infty$  y  $f \in L^p(\mu)$ . Si  $s = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$ , tenemos que  $\|s\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \mu(E_j)\right)^{\frac{1}{p}}$  entonces  $s \in L^p(\mu)$ . Como en la Definición 2.7 definimos  $f^+$  y  $f^-$  y escribimos  $f = f^+ - f^-$ . Como  $f \in L^p(\mu)$ ,  $\mu(\{x \in X :$

$f^+(x)$  o  $f^-(x) = \infty\}$ ) = 0. Entonces podemos modificar la construcción de la función en la Proposición 3.6 para producir sucesiones de funciones simples  $\{s_n^+\}$  y  $\{s_n^-\}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^+(x) - s_n^+(x)| = 0$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^-(x) - s_n^-(x)| = 0$  para casi toda  $x \in X$ ,  $|s_n^+| < |f^+|$  y  $|s_n^-| < |f^-|$ . Como  $f \in L^p(\mu)$  la construcción en la Proposición 3.6 garantiza que las funciones simples se anulan fuera de un conjunto de medida finita. O sea  $\{s_n^+\}, \{s_n^-\} \subset L^p(\mu)$ . Definimos  $s_n = s_n^+ - s_n^-$  y observamos que  $s_n \in L^p(\mu)$ . La desigualdad del triángulo para números reales nos da que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n(x) - f(x)| = 0$  para casi todo  $x \in X$  y también que  $|s_n| < |f|$ . Tenemos que  $|s_n - f|^p < 2^p |f|^p$ . Como  $|f|^p$  es integrable podemos utilizar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue (Teorema 3.8) para concluir que  $\int_X |s_n - f|^p d\mu = 0$ .  $\square$

En la sección previa vimos que una función en  $L^q(\mu)$  define naturalmente un elemento en  $L^p(\mu)^*$  cuando  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . El siguiente teorema nos dice que cuando  $1 \leq p < \infty$  todos los elementos en  $L^p(\mu)^*$  se pueden realizar en esta manera cuando el espacio de medida es  $\sigma$ -finito.<sup>3</sup>

**TEOREMA 4.8** (Teorema de Representación de Riesz). *Sea  $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  un espacio de medida  $\sigma$ -finito,  $1 \leq p < \infty$ ,  $L \in L^p(\mu)^*$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Existe una función única  $g \in L^q(\mu)$  tal que*

$$i. L(f) = \int_X fg d\mu, \quad \forall f \in L^p(\mu).$$

$$ii. \|L\| = \|g\|_q.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Primero tratamos el caso cuando  $\mu$  es finito. Si  $\mu$  es finito, toda función simple está en  $L^p$ . Si  $\psi \in (L^p)^*$ , definimos  $\eta(E) = \psi(\chi_E)$  para todo  $E \in \mathfrak{A}$ . Si  $\{E_j\} \subset \mathfrak{A}$  es una colección disjunta tal que  $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$  se tiene que  $\chi_E = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j}$  y

---

<sup>3</sup>El hipótesis de  $\sigma$ -finito se necesita sólo para el caso  $p = 1$ .

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \chi_E - \sum_{j=1}^n \chi_{E_j} \right\|_p &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_X \left| \chi_E - \sum_{j=1}^n \chi_{E_j} \right|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_X \sum_{j=n+1}^{\infty} \chi_{E_j} d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left( \bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j \right) = 0.
\end{aligned}$$

O sea que  $\chi_E = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j}$  es una igualdad con respecto a la convergencia en  $L^p$ . Como  $\psi$  es funcional lineal continuo, se tiene que  $\psi(\chi_E) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi(\chi_{E_j})$ . Es decir  $\eta(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta(E_j)$ . También si  $\mu(E) = 0$ ,  $\chi_E = 0$  en  $L^p$  y  $\eta(E) = \psi(0) = 0$ . Concluimos que  $\eta$  es una medida compleja en  $\mathfrak{A}$  y que  $\eta \ll \mu$ . El Teorema Radon-Nikodym (Teorema 3.11) nos dice que existe una función  $g \in L^1(\mu)$  tal que

$$\eta(E) = \int_E g d\mu, \quad \forall E \in \mathfrak{A}.$$

Si  $f = \sum a_j \chi_{E_j}$  es una función simple escrita en forma canónica, tenemos la existencia de una función  $g_j$  en  $E_j$  tal que  $\psi(E_j) = \int_{E_j} g_j d\mu$  para cada  $j$ . Definimos  $g = \sum g_j \chi_{E_j}$  y tenemos

$$\begin{aligned}
\psi(f) &= \sum a_j \psi(E_j) = \sum a_j \int_{E_j} g_j d\mu = \int_X \sum a_j \chi_{E_j} g d\mu \\
&= \int_X f g d\mu.
\end{aligned}$$

La cota del funcional da que  $|\int_X f g d\mu| = \|\psi\| \|f\|_p$  para toda función simple  $f$ . El resultado del ejercicio 14 da que  $g \in L^q$ . La desigualdad de Hölder da que  $f \mapsto \int_X f g d\mu$  define un funcional lineal en  $L^p$  y como este funcional iguala  $\psi$  en un conjunto denso de  $L^p$  (Proposición 4.3), los dos funcionales son iguales en  $L^p$ . Esto concluye la demostración cuando  $\mu$  es finito.

Si  $\mu$  es  $\sigma$ -finito, existe una colección creciente  $\{E_j\} \subset \mathfrak{A}$  tal que  $\mu(E_j) < \infty$  y  $X = \bigcup E_j$ . Cada función  $f \in L^p(E_j)$  define naturalmente una función en  $L^p(X)$ : la función extendida  $f_{\text{ext}}$  se define 0 fuera de  $E_j$ . Si  $\psi \in (L^p(X))^*$ ,  $\psi$  define un elemento de  $(L^p(E_j))^*$  utilizando  $\psi(f) = \psi(f_{\text{ext}})$ . El caso finito

da que  $\exists g_j \in L^q(E_j)$  tal que  $\psi(f) = \int_{E_j} f g_j d\mu \forall f \in L^p(E_j)$  y que  $\|g_j\|_q = \|\psi \text{ restringida a } L^p(E_j)\|_q \leq \|\psi\|$ . La función  $g_j$  es única modulo cambios en conjuntos de medida 0. Como los conjuntos  $\{E_j\}$  son crecientes,  $g_j(x) = g_{j'}(x)$  para casi todo  $x \in E_j$  si  $j < j'$ . El límite puntual de la sucesión  $\{g_j\}$  lo utilizamos para definir una función medible  $g$  definida para casi todo  $x \in X$ . El Teorema de Convergencia Monótona (Teorema 3.5) da que  $\|g\|_q = \lim \|g_j\|_q \leq \|\psi\|$  y concluimos que  $g \in L^q(X)$ . Finalmente, si  $f \in L^p(X)$ ,  $\|f\chi_{E_j} - f\|_p \rightarrow 0$ , entonces  $\psi(f) = \lim \psi(f\chi_{E_j})$ . El Teorema de Convergencia Dominada (Teorema 3.8) da que

$$\lim \psi(f\chi_{E_j}) = \lim \int_{E_j} f g_j d\mu = \int_X f g d\mu.$$

El ejercicio 12b establece que  $\|L\| = \|g\|_q$ . □

### Ejercicios

- 26.** Demuestre el caso  $p = \infty$  del Teorema 4.7. Utilice el Teorema 4.3.
- 27.** Demuestre la Proposición 4.3 cuando  $p = \infty$ .

## Bibliografía

- [Ch] S.B. Chae, *Lebesgue Integration*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [Co] D.L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston, 1980.
- [F] G.B. Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, Wiley, New York, 1984.
- [KF] A.N. Kolmogorov y S.V. Fomín, *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, Editorial Mir, Moscú, 1975.
- [O] J.C. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [R] H.L. Royden, *Introduction to Real Analysis*, 2nd edition, Macmillan, New York, 1968.

Los *Apuntes* son el resultado de un cursillo que se realizó en la Escuela de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Universidad de El Salvador (UES) en julio de 1995. La exposición está diseñada para estudiantes y profesores de matemáticas quienes tienen un buen conocimiento de los conceptos y técnicas fundamentales del análisis clásico. El lector ideal es el estudiante de matemáticas de último año de licenciatura o de primer año de maestría.

El texto está escrito con más detalles de lo que se acostumbra en textos de matemáticas. Esto se hizo para que el lector que estudia teoría de la medida sin la ayuda de un profesor lo pueda hacer sin mucha referencia a otros textos.

Herbert A. Medina, nacido en El Salvador, estudió su licenciatura en matemáticas y ciencias de computación en la Universidad de California, Los Angeles (UCLA) y su maestría y doctorado en matemáticas en la Universidad de California, Berkeley. Desde 1992 es profesor de matemáticas en la Universidad Loyola Marymount en Los Angeles, California.